

IL
NUOVO CIMENTO
ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VII, N. 5

Serie nona

25 Settembre 1950

Interferometria ultrasonora nei gas.

I.

S. PETRALIA

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto il 19 Giugno 1950)

Riassunto. — Dopo aver richiamato le principali quistioni connesse col fenomeno della dispersione degli ultrasuoni nei gas, si descrive un interferometro del tipo a cammino variabile, che permette di determinare le costanti di propagazione (velocità e coefficiente di assorbimento) di ultrasuoni nei gas e vapori, per frequenze comprese tra 50 e 2 000 kHz e si insiste sulla tecnica sperimentale e sulle precauzioni da prendere in questo tipo di misure. Si dà quindi notizia di alcune misure preliminari fatte nella anidride carbonica e nel gas illuminante, dalle quali risulta che anche in quest'ultimo gas (è ben noto che l'anidride carbonica è dispersiva) c'è dispersione di velocità, nella banda di frequenze da 58 a 1 400 kHz sperimentata.

Introduzione.

Nel 1925 G. W. PIERCE ⁽¹⁾ notava che la velocità di propagazione del suono nell'anidride carbonica era funzione della frequenza di questo. Da allora molti e importanti lavori sono apparsi sulla dispersione della velocità delle onde sonore nei gas. Come è ben noto, il fenomeno è legato al tempo finito, richiesto in un gas, perchè avvenga il trasferimento di energia dai gradi di libertà di traslazione ai gradi interni di vibrazione di una molecola, e in tal senso si parla di un tempo di rilassamento, necessario perchè si stabilisca uno stato di equilibrio nell'energia delle molecole. Attraverso gli urti tra molecole e molecole,

⁽¹⁾ G. W. PIERCE: *Proc. Amer. Acad. Boston*, **60**, 271 (1925).

l'energia del moto traslatorio di queste può eccitare difatti i quanti interni di oscillazione. Naturalmente la probabilità che questo avvenga dipenderà dal numero di urti che una molecola può subire nel periodo di una vibrazione sonora, nel caso s'intende che la energia di traslazione sia conseguenza delle propagazione di un suono nel gas. Ora tale probabilità è molto piccola, essendo necessario un gran numero di urti perchè tale trasferimento avvenga, e si comprende come essa probabilità debba dipendere e dalla frequenza del suono e dalla pressione del gas. Se il periodo del suono o la densità del gas sono piccoli, praticamente non si ha alcun passaggio di energia traslatoria delle molecole sotto forma di energia interna. In tal caso ogni compressione e dilatazione adiabatica del gas, il cui periodo sia paragonabile o inferiore al suddetto tempo di rilassamento, impegna la quota di energia spettante solo al moto traslatorio o, più in generale, a quei gradi di libertà tra i quali lo scambio energetico può completarsi, o quasi, e l'equilibrio tra gradi di libertà di traslazione e gradi interni non si raggiunge più: la temperatura del gas quindi cresce. Ne risulta allora una diminuzione dei calori specifici del gas cioè un aumento del rapporto $\gamma = C_p/C_v$ e di conseguenza della velocità del suono $V = \sqrt{p\gamma/d}$. A meno di non usare pressioni molto piccole, il che può urtare nelle misure con difficoltà, le frequenze del suono, per le quali si ha dispersione della velocità, cadono normalmente nel campo ultraacustico.

Si comprende allora come la misura della velocità degli ultrasuoni nei gas abbia assunto notevole interesse per lo studio della struttura molecolare, ed effettivamente molti gas sono stati già, sotto questo punto di vista, esaminati. Poco invece ancora si è fatto nel caso di vapori organici, e d'altra parte varie questioni rimangono aperte. È stata studiata l'influenza della pressione, della temperatura, della presenza di gas estranei nella posizione della regione di dispersione, regione che poi manifestamente è legata a un notevole assorbimento di energia. Un aumento di pressione importa un aumento nel numero degli urti, che una molecola può subire in un dato intervallo di tempo, e quindi produce uno spostamento della regione di dispersione verso frequenze degli ultrasuoni più elevate: oggi generalmente le curve di dispersione si sogliono dare riportando le velocità (o i quadrati di queste) in funzione del rapporto f/p , essendo f la frequenza e p la pressione.

KNUDSEN ⁽²⁾ e successivamente EUCKEN ⁽³⁾ hanno dimostrato, che piccole quantità di gas estranei hanno in generale un effetto enorme sull'efficienza dei processi di urto, e quindi sulla posizione della banda di dispersione: questa viene spostata verso le frequenze più elevate, come se l'urto di una molecola estranea con una molecola del gas in esame fosse più efficace a eccitare stati di energia vibratoria, che non l'urto con una molecola della stessa specie.

⁽²⁾ V. O. KNUDSEN: *Journ. Acoust. Soc. Amer.*, **3**, 126 (1931); **6**, 199 (1935).

⁽³⁾ A. EUCKEN e H. JAACKS: *Zeits. f. phys. Chemie*, **30** B, 85 (1935).

Notevole è ancora il fatto che quasi sempre si è trovata una sola banda di dispersione, anche in molecole ove sono possibili alla temperatura dell'esperimento più tipi di vibrazioni, per le quali quindi ci si potrebbe aspettare un diverso comportamento dell'eccitazione, con diversi tempi di rilassamento e perciò diverse regioni di dispersione. Si può qui pensare, che il processo primario d'eccitazione involga solo una delle oscillazioni (l'oscillazione di deformazione) intramolecolari possibili e che, successivamente da questa venga attivata l'oscillazione di valenza; tale trasferimento avverrebbe più facilmente nei casi in cui sia possibile una risonanza tra stati elevati dell'oscillazione di deformazione e l'oscillazione di valenza; le misure con ultrasuoni permettono allora di rilevare solamente il periodo di rilassamento corrispondente della prima oscillazione.

Per quanto riguarda l'esistenza di un tempo di rilassamento legato all'eccitazione di quanti di rotazione, un esempio tipico notevole è stato fornito recentemente da STEWART (4) nell'idrogeno, sperimentando con frequenze ultrasonore attorno a 6 000 kHz.

Le misure di velocità, onde poter rilevare la presenza di una eventuale regione di dispersione, richiedono cure particolari; esse vengono normalmente compiute con un dispositivo, cui si dà il nome di interferometro ultrasonoro, la teoria del quale è stata svolta da vari autori (5).

Descrizione dell'interferometro.

L'interferometro da me costruito è del tipo a cammino variabile, e si può far risalire ai modelli descritti da una parte da PLELEMAYER (6) e dall'altra da EUCKEN e NÜMANN (7). In principio esso comprende una sorgente vibrante — un cristallo di quarzo piezoelettrico — e un riflettore colla superficie riflettente parallela alla sorgente, che si può avvicinare o allontanare da questa, entrambi posti nell'ambiente ove è il gas da studiare. Il quarzo è connesso al circuito oscillante di un generatore tipo Hartley, alimentato in guisa da assicurare una buona costanza dell'ampiezza dell'oscillazione e della frequenza. Quando la distanza tra la sorgente vibrante e il riflettore uguaglia un numero intero di $\lambda/2$, essendo λ la lunghezza d'onda della vibrazione, che si propaga nel gas interposto, si forma notoriamente un sistema di onde stazionarie: il gas funziona come un risonatore e assorbe energia dalla sorgente; in conse-

(4) E. S. STEWART: *Phys. Rev.*, **69**, 632 (1946).

(5) V. ad es. J. C. HUBBARD: *Phys. Rev.*, **38**, 1011 (1931); **41**, 532 (1932); **46**, 525 (1934).

(6) D. TELFAIR e W. H. PLELEMAYER: *Rev. Sci. Instr.*, **13**, 122 (1942).

(7) A. EUCKEN e E. NÜMANN: *Zeits. f. phys. Chemie*, **36 B**, 163 (1937).

guenza varia la corrente nel circuito anodico di alimentazione e tale variazione si ripete ogni qualvolta, movendosi il riflettore, la distanza anzidetta cresce o diminuisce di $\lambda/2$; un galvanometro, posto nel circuito anodico e compensato per la parte costante della corrente anodica, permette di rivelare le fluttuazioni di questa; in opportune condizioni, e cioè per un perfetto parallelismo tra riflettore e sorgente e in vicinanza di questa, si possono avere nel mio dispositivo variazioni che raggiungono il 20-25 % della corrente totale.

In pratica bisogna usare varie precauzioni perchè le misure possano avere significato. Anzitutto occorre poter sperimentare con una specie gassosa ben definita in composizione, e che tale si mantenga durante le misure; in particolare bisogna poter disporre di gas perfettamente puri, poichè come sopra abbiamo notato, piccole quantità di gas estranei alterano il valore dei tempi di rilassamento (e anche dei coefficienti di assorbimento). Inoltre bisogna poter sperimentare con pressioni diverse del fluido e a temperature diverse. Per tutto questo occorrerà poter disporre sorgente e riflettore in un recipiente, dove si possa fare il vuoto, che si possa riempire col gas o vapore in studio e che possa esser tenuto in un termostato a temperature che possano raggiungere o superare i 100 °C, mentre il riflettore dovrà esser mobile dall'esterno mediante una vite micrometrica a passo noto e fine. Conviene inoltre che la camera interferometrica non abbia piccole dimensioni, che altrimenti i risultati andrebbero corretti, alle frequenze basse della sorgente, per la dispersione introdotta dal cilindro che limita la camera; sia costituito di materiale inattaccabile dai gas presenti e si possa facilmente smontare, per la sostituzione dei quarzi di diversa frequenza.

La fig. 1 mostra chiaramente lo schema di tutto l'interferometro.

La camera interferometrica, di ottone, del diametro di 10 cm, è chiusa superiormente, con l'intermediario di una flangia di piombo, da un grosso disco di ottone. Questo porta verso l'interno della camera tre aste di acciaio, che sostengono una lastra di vetro *V*, regolabile nella sua inclinazione mediante congegni a vite; su tale lastra vengono posti gli elettrodi e il quarzo oscillante. Verso l'esterno, il disco di chiusura porta saldati dei tubi per il passaggio delle connessioni elettriche e di una pinza termoelettrica, per la vuotatura e per l'introduzione del gas, e inoltre centralmente un foro, che si prolunga in un blocco di ottone *O*, ove può scorrere un'asta di acciaio sostegno del riflettore *R*. La tenuta è qui realizzata da un lungo tratto di soffietto in tombac *T*; l'estremo superiore di questo tiene saldata l'asta del riflettore ed è connesso mediante un lungo tubo di vetro pirex *P* a un sistema madrevite-vite senza fine *MV*, col quale si possono imprimere gli spostamenti del riflettore. Tale vite, a sua volta, porta in testa un ingranaggio *I* mediante il quale, attraverso puleggie riduttrici di velocità, è connessa a un motore elettrico, e inoltre un tamburo *C*, sul quale è avvolta della carta millimetrata, ove una penna *N*, che si sposta con la madrevite, segna un'elica di passo 1 mm.

(passo della vite); la penna, comandata da un congegno elettromagnetico, permette di registrare sulla carta le posizioni del riflettore per le quali si hanno le massime deviazioni del galvanometro, deviazioni che si ripetono per ogni

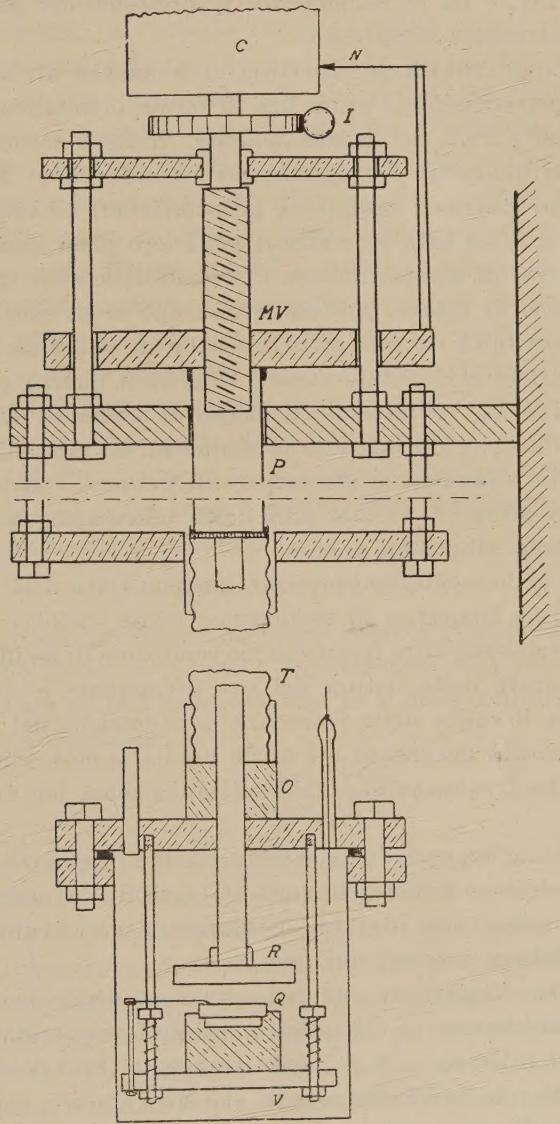


Fig. 1.

spostamento del riflettore di mezza lunghezza d'onda della vibrazione ultrasonora. Con tale sistema l'errore che si può commettere nella misura di λ può scendere al disotto di 0,5 %.

La camera interferometrica può essere sistemata in un termostato con regolazione della temperatura, fino a 100 °C, a meno di 1/10 di grado. La temperatura nella camera è misurata mediante una pinza termoelettrica, fatta di rame-costantana, e un potenziometro; la pressione del gas viene misurata mediante un manometro a mercurio.

Ho usato cinque cristalli piezoelettrici di frequenza 57, 221,6, 600, 899,2 e 1400 kHz rispettivamente, i primi due di forma prismatica (superficie emittente $1,9 \times 1,4$ cm e 2×2 cm rispettivamente) vibranti secondo l'asse *Y* e gli altri tre circolari (diametro 3 cm) vibranti secondo l'asse *X*.

I cristalli sono argentati sulle facce perpendicolari all'asse elettrico; quelli di frequenza 57 e 221,6 kHz sono stretti per i loro piani nodali mediante due viti tra due lastrine di ottone, mentre i cristalli delle altre tre frequenze pogiano su un blocco di ottone, che costituisce uno degli elettrodi, l'altro elettrodo essendo costituito da una striscia sottile di alluminio fissata al bordo della faccia superiore dei cristalli stessi. Affinchè il quarzo possa trasmettere le sue vibrazioni al gas sovrastante, il blocco di ottone di sostegno è scavato per un diametro lievemente inferiore al diametro dei cristalli, e per una profondità, che è stata lasciata la stessa per tutti. Come è noto, migliori risultati si sarebbero ottenuti, se tale profondità uguagliasse un quarto di lunghezza d'onda della vibrazione sonora.

L'eccitazione delle oscillazioni presenta qualche volta delle difficoltà: alcuni cristalli hanno delle frequenze di oscillazione molto vicine e talvolta si eccitano sull'una talvolta sull'altra frequenza; le condizioni di oscillazioni in qualche caso sono influenzate dalla natura del gas sovrastante e dalla pressione di questo, segno che il valore della resistenza di radiazione del cristallo dipende dalla natura e densità del mezzo nel quale oscilla, e così quindi la sua impedenza elettrica. La frequenza di tutti i cristalli risente poi della temperatura ambiente.

Dato il tipo di taglio, non c'è da aspettarsi che i quarzi stessi oscillino come pistoni, tuttavia le loro dimensioni sono state scelte in modo da avvicinarsi il più possibile a questo tipo ideale di oscillazione; si ha avuto poi cura di fare le misure col riflettore lontano dal quarzo.

L'esperienza ha dimostrato, che condizione essenziale per il buon funzionamento di un interferometro ultrasonoro, è il perfetto parallelismo tra i piani che definiscono il riflettore e la sorgente emittente. Se tale condizione non è soddisfatta, l'onda riflessa ha componenti che sono sfasate, con la conseguenza che si producono, da una parte, dei massimi multipli, e dall'altra, si causa un effetto simile a quello prodotto da un assorbimento di energia. Tale azione, dannosa per le misure, manifestamente si fa sentire sempre più man mano che aumenta la frequenza dell'oscillazione, e si comprende come rimanga più fortemente compromessa la determinazione del coefficiente di assorbimento.

ALLEMANN⁽⁸⁾ ha pubblicato delle curve, che mostrano l'effetto veramente perturbatore di un cattivo grado di parallelismo sulla struttura dei massimi di variazione della corrente anodica (o del circuito oscillante stesso).

Variamente è stato risolto il problema di rendere parallele le due superfici in questione; un metodo di controllo ottimo è quello di servirsi di un sistema ottico, col quale produrre frange d'interferenza tra le due superfici. QUIRK e ROCK⁽⁹⁾ hanno connesso il riflettore all'asta di sostegno mediante un giunto universale col quale è possibile porre a contatto il riflettore colla superficie del quarzo: le due superfici risultano allora parallele e tali si manterranno durante la successiva traslazione del riflettore. Un metodo analogo è stato seguito da me. Pur tuttavia, forse a causa della cattiva conformazione del giunto, si è trovato, che l'ampiezza dei massimi ulteriormente cresceva, se si aveva cura di fare un successivo regolaggio, mediante le tre viti di livellamento della base di vetro, sulla quale sono fissati i cristalli.

Il dispositivo consente misure di velocità e di coefficienti di assorbimento. Determinati i valori di λ , la velocità di propagazione si ottiene dalla ben nota formula $V = \lambda f$. La maggior parte degli autori suole riferire i valori trovati alla temperatura di 0°C e finchè ci si contenta dell'approssimazione, entro la quale si può ritenere il gas come perfetto, dalla lunghezza d'onda misurata a t^0 si ricava V_0 mediante la relazione

$$V_0 = \lambda f [273,2/(t^0 + 273,2)]^{1/2}.$$

In misure di estrema precisione occorrerà scrivere l'equazione di stato del gas reale sotto la forma $pv = RT + Bp$, essendo B il secondo coefficiente del viriale, e ricavare da essa la dipendenza di V dalla temperatura, essendo V data dall'espressione generale

$$V^2 = - \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \frac{v^2}{M} \frac{C_p}{C_v},$$

con evidente significato dei simboli. Ciò si suol sempre fare quando si voglia ricavare il valore di C_p/C_v . Occorrerà quindi conoscere il valore di B ; per vari gas e vapori esso è stato determinato, altrimenti lo si può calcolare, dai dati critici, mediante l'equazione di Berthelot. In ogni caso la determinazione di V alla temperatura dell'esperienza importa la conoscenza oltre che di λ , della frequenza degli ultrasuoni. Questa veniva da me determinata, introducendo aria secca e privata di anidride carbonica nell'apparato, misurando per essa la lunghezza d'onda, e pigliando per valore della velocità nell'aria a 0° il dato di KNESER⁽¹⁰⁾ cioè 331,6 m/s; l'aria come è noto, fino a 1400 kHz, frequenza

⁽⁸⁾ R. S. ALLEMANN: *Phys. Rev.*, **55**, 87 (1939).

⁽⁹⁾ A. L. QUIRK e G. D. ROCK: *Rev. Sci. Instr.*, **6**, 6 (1935).

⁽¹⁰⁾ H. O. KNESER: *Ann. der Phys.*, **665**, 34 (1939).

massima da me usata, non è dispersiva. Durante la misura si verificava la costanza della frequenza dell'oscillazione mediante un frequenziometro a quarzo, che veniva accordato con l'oscillatore riducendo a zero i battimenti; il frequenziometro di tanto in tanto veniva controllato, nella sua taratura, mediante frequenze di trasmissioni radio, e così poteva servire anche per la determinazione diretta della frequenza del quarzo generatore dell'interferometro.

Per la misura dei coefficienti di assorbimento si può ricorrere al metodo indicato da PIELEMAYER (11) e giustificato teoricamente da HARDY (12) nel caso, veramente in pratica non sempre facilmente realizzabile, che l'energia sonora sia debole e il riflettore lontano dalla sorgente. Il coefficiente d'assorbimento μ per lunghezza d'onda è dato da $\mu = (2,303/n) \lg_{10} (\Delta i_a / \Delta i_b)$ essendo Δi_a e Δi_b le differenze tra le correnti di placca alla risonanza e all'antirisonanza, per le posizioni a e b del riflettore, e n il numero di lunghezze d'onda comprese tra a e b .

Alcune misure preliminari.

In via del tutto di orientamento ho cominciato a eseguire delle misure di velocità, adoperando come gas l'anidride carbonica e il gas illuminante. L'anidride carbonica è stata studiata da vari autori; essa presenta una netta regione di dispersione attorno alla frequenza di 70 kHz; non sempre i dati, che si trovano nella letteratura, vanno d'accordo, corrispondentemente al fatto più volte affermato che tracce d'impurità alterano fortemente i risultati. Così RICHARDS e REID (13) danno per la velocità in tale gas, alla pressione di 774 mm di Hg e alla temperatura di 30 °C, determinata in due esperimenti per le frequenze vicinissime 92 e 94 kHz i valori 274,6 e 280,4 m/s e la discordanza non può certo attribuirsi alla piccola variazione nella frequenza degli ultrasuoni.

L'anidride carbonica era preparata in un Kipp da marmo e acido cloridrico, seccata per passaggio attraverso acido solforico e un tubo contenente anidride fosforica, e quindi immessa nell'interferometro precedentemente evacuato. Nella tab. I sono riferiti i risultati delle misure per le tre frequenze 57, 221,6 e 600 kHz; la pressione del gas era sempre di 760 mm Hg, la velocità è riferita alla temperatura di 0° C.

(11) W. H. PIELEMAYER: *Phys. Rev.*, **34**, 1184 (1929).

(12) H. C. HARDY: *Phys. Rev.*, **61**, 740 (1942).

(13) W. T. RICHARDS e J. A. REID: *Journ. Chem. Phys.*, **2**, 193 (1934).

TABELLA I.

f kHz	t °C	λ mm	P mm Hg	V_0 m/s
57	26°,2	4,82	760	262,4
221,6	25°,4	1,26	»	267,1
600	25°,7	0,47	»	269,6

L'accordo con i valori di V_0 , che si possono ricavare dai lavori di KNESER (14), RICHARDS e REID (15), RICHARDSON (16) può ritenersi discreto.

Il gas illuminante era immagazzinato dalla condutture stradale e successivamente introdotto nell'apparecchio già vuotato; generalmente si aveva cura di lavare la camera interferometrica, introducendo e aspirando diverse volte il gas. La composizione in volume di questo è la seguente:

anidride carbonica	4,2 %
ossigeno	2 %
idrocarburi non saturi	2 %
ossido di carbonio	9,8 %
metano	19,8 %
idrogeno	37 %
azoto	25,2 %

Comprende quindi dei gas, come l'anidride carbonica, l'ossido di carbonio, il metano e alcuni idrocarburi non saturi (etilene ed altri) che sono dispersivi nel campo delle frequenze da 57 a 1400 kHz e perciò c'è da aspettarsi, che anch'esso si comporti come dispersivo. E infatti le medie di molte misure hanno dato i seguenti valori della velocità riferita a 0° (tab. II).

I gas dispersivi contenuti nel miscuglio in più forte proporzione sono il metano e l'ossido di carbonio, segue poi l'anidride carbonica; manifestamente la dispersione trovata per il gas illuminante in esame deve essere in rapporto con le bande delle frequenze di dispersione per i suddetti gas, e d'altra parte la sua posizione deve dipendere dalle impurità presenti, che qui addirittura costituiscono più del 60 % del volume totale. Come questo abbia luogo può essere oggetto di un altro studio, come pure il calcolo del tempo di rilassamento e della capacità termica del miscuglio.

(14) H. O. KNESER: *Ann. der Phys.*, **11**, 777 (1931).

(15) W. T. RICHARDS e J. A. REID: *Journ. chem. Phys.*, **2**, 193 (1934).

(16) E. G. RICHARDSON: *Proc. Roy. Soc., A* **146**, 56 (1934).

TABELLA II.

f kHz	t °C	λ mm	P mm Hg	V_0 m/s
57	25°	7,92	760	432,3
221,6	25°,6	2,06	»	437
600	25°	0,77	»	441,6
899,2	25°,7	0,516	»	443,5
1 400	25°,2	0,331	»	444,1

È evidente che i valori della velocità debbano fortemente dipendere dalla composizione del miscuglio; così alcune misure, fatte circa un mese prima di quelle sopra riferite, con gas illuminante a composizione alquanto diversa, hanno dato alle frequenze di 600 e 899,3 kHz per la velocità (riferita a 0° C) i valori 418,8 e 421,2 m/s. Da qualeuno (17) in questo senso è stata prospettata la possibilità, da misure di velocità del suono in una miscela di gas, fatte con un interferometro, di risalire alla determinazione della composizione di questa. ISHII (18) avrebbe addirittura pensato di costruire un interferometro-igrometro (nel caso che si abbia a che fare con aria umida) che avrebbe il pregio di dare indicazioni di umidità non influenzate dal dispositivo di misura.

Ringrazio il professore G. VALLE che mi è stato largo di mezzi per queste ricerche.

(17) E. GRIFFITHS: *Proc. Phys. Soc. London*, **39**, 300 (1927).

(18) C. ISHII: *Scient. Pap. Inst. Phys. chem. Res. Tokyo*, **19**, 83 (1932).

SUMMARY

After a reference to the principal questions connected with the scattering of ultrasonic waves in gases, the paper relates on a variable path interferometer which allows the determination of the propagation constants (velocity and absorption coefficient) of ultrasonic waves in gases and vapours, for frequencies comprised between 50 and 2 000 kHz and the experimental technique and the precautions to take in this kind of measurements are thoroughly treated. Notice is given of some preliminary measurements made in CO_2 and in lighting gas, from which results that also in this latter gas (that CO_2 is dispersive is known) one has dispersion of velocity, in the frequencies between 58 and 1 400 kHz.

Eccesso positivo e asimmetria Est-Ovest della radiazione penetrante tra il livello del mare e 7300 m s.l.m. .

I. F. QUERCIA, B. RISPOLI e S. SCIUTI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 23 Giugno 1950)

Riassunto. — A conclusione di una serie di misure sull'eccesso positivo eseguite mediante lenti magnetiche a diverse quote ed in diverse condizioni sperimentali, si tenta una interpretazione quantitativa di tutti i dati ottenuti, facendo uso della teoria di generazione singola dei mesoni. Si arriva alla conclusione che entro i limiti delle approssimazioni fatte tale teoria è in accordo con i dati sperimentali ottenuti, pur di assumere come equiprobabili i processi di produzione di mesoni carichi e di neutretti, e si trova che negli urti tra nucleoni circa il 20 % dell'energia del nucleone incidente viene ceduta al mesone generato. Per quanto riguarda le misure dell'eccesso di carica in direzione inclinata da Est e ad Ovest, la curvatura che subiscono le traiettorie mesoniche nel campo magnetico terrestre sembra giustificare completamente l'effetto di carica negativo misurato ad Ovest. Queste ultime misure, eseguite alla latitudine geografica di 45° 50' Nord, e con angolo zenitale di 60°, indicano anche una asimmetria est-ovest sulla primaria di circa il 12 %. Vengono infine discusse, secondo la nostra interpretazione, le misure dell'eccesso positivo e delle asimmetrie est-ovest sino ad ora eseguite da altri Autori.

1. — Introduzione.

1-1. — In questi ultimi anni vari autori hanno eseguito misure sull'eccesso positivo della radiazione penetrante in diverse condizioni sperimentali, ed a diverse quote. Mentre le misure integrali al livello del mare indicano concordemente che l'eccesso positivo si aggira attorno al 15 %⁽¹⁻⁴⁾, le misure diffe-

(¹) D. J. HUGHES: *Phys. Rev.*, **57**, 592 (1940); H. JONES: *Rev. Mod. Phys.*, **11**, 235 (1939).

(²) G. BERNARDINI, M. CONVERSI, E. PANCINI, E. SCROCCO e G. C. WICK: *Phys. Rev.*, **68**, 109 (1945); G. BERNARDINI, M. CONVERSI, E. PANCINI e G. C. WICK: *Ric. Scient.*, **12**, 1227 (1941).

(³) I. F. QUERCIA, B. RISPOLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **4**, 283 (1947); *Phys. Rev.*, **73**, 516 (1948).

(⁴) C. BALLARIO, M. BENINI e G. CALAMAI: *Nuovo Cimento*, **5**, 187 (1948).

renziali (5-10) non sono tra di loro in accordo, ed il maggior disaccordo si manifesta verso le alte energie dove, secondo OWEN e WILSON (8) l'eccesso positivo diminuisce al crescere dell'energia, mentre secondo CARO, PARRY, RATHGEBER (9) cresce leggermente od al più si mantiene costante.

L'andamento dell'eccesso positivo con l'altezza è invece poco noto in quanto si hanno scarsi dati con errori relativamente elevati; tuttavia sembrerebbe (3), (6), (11), (12) che l'eccesso positivo cresca con l'altezza, il che viene generalmente interpretato come una indicazione che esso diminuisca con l'energia.

Un'analoga conclusione sembrerebbe potersi trarre dalle misure in direzione inclinata di BALLARIO, BENINI e CALAMAI (4), per quanto queste ultime siano in contrasto con le nostre misure a 3500 m in direzione inclinata (13) e con l'esperienza di GROETZINGER e McClure (7). Si deve però tener presente che il telescopio di BALLARIO e collaboratori era puntato verso il Nord magnetico mentre il nostro e quello di GROETZINGER e McClure ad Est e ad Ovest. Infatti nel presente lavoro sarà, tra l'altro, dimostrato che nel piano Est-Ovest la misura dell'eccesso positivo, viene mascherata dall'effetto del campo magnetico terrestre sulle traiettorie dei mesoni nell'atmosfera.

Come si mostrerà nel seguito, è possibile interpretare i risultati sperimentali assumendo che l'eccesso positivo sia una funzione crescente dell'energia.

1-2. — L'osservata prevalenza di particelle penetranti positive sul numero delle negative, viene posta in relazione con l'ipotesi che la primaria carica della radiazione cosmica sia prevalentemente costituita da protoni; in tale ipotesi ed accentando il principio della conservazione della carica elettrica, le misure sull'eccesso positivo possono fornire qualche informazione sulle modalità con cui vengono generati dalla primaria i mesoni osservati. Come è noto, se si assume lo schema di produzione proposto da HEISENBERG (14) secondo

(5) N. NERESON: *Phys. Rev.*, **73**, 365 (1948); M. CONVERSI, E. PANCINI e O. PICCIONI: *Nuovo Cimento*, **3**, 372 (1946); R. B. BRODE: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **5**, 24 (1949).

(6) M. CONVERSI: *Phys. Rev.*, **76**, 311 (1949).

(7) G. GROETZINGER e G. W. McClure: *Phys. Rev.*, **77**, 777 (1950).

(8) B. G. OWEN e J. G. WILSON: *Proc. Phys. Soc.*, **62**, 601 (1949).

(9) D. E. CARO, J. K. PARRY e H. D. RATHBERGER: *Nature*, **165**, 688 (1950).

(10) P. PASSI, E. CLEMENTHEL, I. FILOSOFO e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **6**, 485 (1949).

(11) I. F. QUERCIA, B. RISPOLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **5**, 397 (1948); *Phys. Rev.*, **74**, 1728 (1948).

(12) R. W. ADAMS, C. D. ANDERSON, P. E. LLOYD, R. R. RAU e R. C. SAXENA: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 334 (1948).

(13) I. F. QUERCIA, B. RISPOLI, e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 277 (1950).

(14) W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.*, **101**, 533 (1936); **126**, 569 (1949); *Nature*, **164**, 65 (1949).

il quale nell'urto nucleone-nucleone vengono generati più mesoni (*produzione multipla*) si trova, per energie sufficientemente elevate, che l'eccesso positivo diminuisce approssimativamente come l'inverso della radice quadrata dell'energia del mesone. Assumendo invece come schema di produzione quello proposto da HEITLER (15), (16), secondo il quale i mesoni vengono generati per atti singoli successivi (*produzione plurima*) l'eccesso positivo risulta lentamente crescente con l'energia.

Come è stato mostrato (17), (18) la molteplicità in generazione, per energie al di sotto di 10 GeV, è molto bassa (dell'ordine di 2) e quindi per energie inferiori a questo limite, le due teorie danno entrambe risultati in accordo con l'esperienza. Per energie superiori invece le due teorie danno dei risultati diversi.

Nei prossimi numeri cercheremo di interpretare teoricamente i nostri dati sperimentali (3), (11), (13), assumendo lo schema di produzione plurima nella forma in cui esso è stato recentemente esposto da CALDIROLA (18).

2. — Dispositivo sperimentale e sua teoria.

2-1. — Come è stato già descritto (3), il dispositivo sperimentale che abbiamo usato per la misura dell'eccesso positivo, analogo a quello usato da BERNARDINI, CONVERSJ, PANCINI e WICK (2), è costituito da due circuiti magnetici uguali, sovrapposti, entro i quali, mediante una corrente continua, è possibile creare un campo magnetico di intensità e verso variabili. Un telescopio di tre contatori *A*, *B*, *C* individua un angolo solido che attraversa entrambi i circuiti magnetici, come mostra la fig. 1. Vengono contate mediante una registrazione ad alto potere risolutivo le coincidenze (*A*, *B*, *C*) e, per controllo, le coincidenze (*A*, *B*) e (*B*, *C*). Nel seguito ci riferiremo soltanto alle coincidenze (*A*, *B*, *C*) che interessano mesoni di energia superiore a circa 0,5 GeV, in quanto le coincidenze doppie presentano una grande indefinizione angolare e l'azione della lente magnetica è molto più debole.

Con tale apparecchio sono state eseguite misure in direzione verticale al livello del mare, a 5100 m (3) e a 7300 m (11), in aereo gentilmente messo a nostra disposizione dalla «Aeronautica Militare», e a 3500 m (13) al «Laboratorio della Testa Grigia» (L.T.G.).

Al L.T.G. inoltre sono state effettuate misure in direzione inclinata di

(15) J. HAMILTON, W. HEITLER e H. W. PENG: *Phys. Rev.*, **64**, 78 (1943); W. HEITLER e P. WALSH: *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 252 (1945).

(16) W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, A **42**, 374 (1949).

(17) P. CALDIROLA e A. LOINGER: *Nuovo Cimento*, **7**, 161 (1950); M. CINI e G. WATAGHIN: *Nuovo Cimento*, **7**, 135 (1949).

(18) P. CALDIROLA: *Nuovo Cimento*, **6**, 565 (1949).

60° E e 60° O; il dispositivo usato al L.T.G. comprendeva anche contatori laterali e verticali in anticoincidenza (non disegnati in figura) per la protezione contro gli sciami laterali. Nelle misure in aereo, a causa della grande

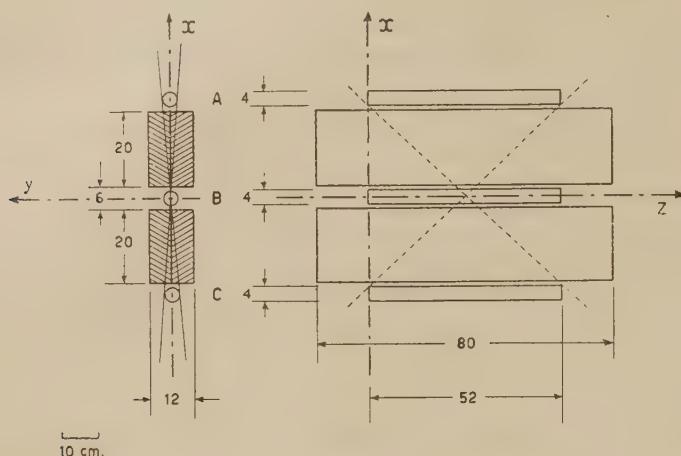


Fig. 1.

limitazione di spazio, si era invece protetto il contatore *B* con 5 cm di piombo per parte.

2-2. – Quando una particella carica e di sufficiente energia, attraversa il telescopio, la sua traiettoria viene deflessa dal campo magnetico, e da esso viene fatta «convergere» oppure «divergere» a seconda del suo segno e del verso del campo stesso entro i due circuiti magnetici. In tal senso questi hanno sulle particelle cariche un'azione simile a quella di due lenti magnetiche, in modo che sia possibile convergere prevalentemente particelle di un segno rispetto a quelle del segno opposto. Naturalmente particelle di energia sufficientemente elevata possono attraversare il telescopio indipendentemente dal loro segno: pertanto il numero di particelle registrato dal telescopio nell'unità di tempo con il campo magnetico diretto, ad esempio, in verso tale da convergere le positive, sarà uguale al numero di tutte le particelle positive dotate di energia sufficiente per attraversare il ferro dei magneti, più il numero delle particelle negative che hanno energia tale da non risentire sufficientemente l'azione divergente del campo magnetico.

Per questa ragione i dati sperimentali forniti dalle misure eseguite con questo apparecchio non sono direttamente interpretabili come misure eseguite su particelle di un solo segno, ma devono essere elaborati tenendo conto, come si è detto, che la efficienza a separare particelle dei due segni è inferiore ad 1.

2-3. — La teoria approssimata dell'apparecchio è stata descritta da BERNARDINI e coll. (3), per cui noi qui ne riassumeremo solo i tratti principali. Il calcolo numerico delle espressioni fornite da questa teoria è stato eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo il cui Direttore, prof. MAURO PICONE, desideriamo qui ringraziare vivamente insieme al dottor GROSS che ha condotto i calcoli.

Conviene schematizzare l'apparecchio come nella fig. 2. Quivi i tre contatori sono sostituiti da tre aree piane rettangolari A , B , C di dimensioni pari alla sezione massima longitudinale dei contatori, di lunghezza l e larghezza $2r$, poste tra loro alla distanza d . Il campo magnetico è considerato nullo in tutto lo spazio tranne che entro la striscia racchiusa tra i due piani $x = d$ e $x = -d$; quivi esso ha il valore costante B , è parallelo all'asse z , e di versi opposti dai due lati del piano $y = 0$.

La generica traiettoria T di una particella carica che incida sull'apparecchio sarà individuata dall'angolo ω che essa forma con la direzione negativa dell'asse z , e dall'angolo ζ che forma con la direzione negativa dell'asse x .

La sua proiezione sul piano $z = 0$, detta T' (vedi fig. 3), formerà l'angolo φ con la direzione negativa dell'asse x . Con questa schematizzazione si può allora mostrare che il valore di ω si mantiene costante lungo tutta la traiettoria. Conviene allora considerare separatamente:

a) la proiezione T'' della traiettoria sul piano $y = 0$. Poi che il suo raggio di curvatura è molto maggiore delle dimensioni dell'apparecchio, essa può venir approssimata con una retta. Poi che inoltre sarà sempre $r/d \ll 1$, si potrà porre $\cos \varphi \sim 1$, per cui l'angolo tra la T'' e la direzione negativa dell'asse z sarà approssimativamente ω . In queste approssimazioni la T'' deve soddisfare le condizioni:

se per $x = d$ per la T'' è $z = z_1$, deve essere:

$$0 < z_1 < l; \quad 0 < (z_1 - 2d \cot \omega) < l,$$

perchè essa attraversi le tre aree sensibili A , B , C .

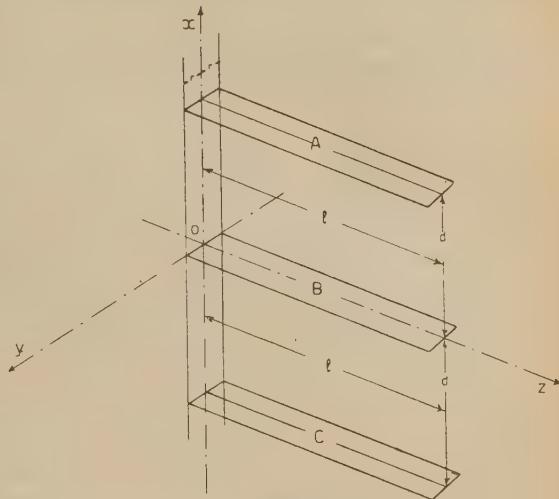


Fig. 2.

b) la proiezione T' della T sul piano $z = 0$.

Consideriamo una particella di energia cinetica E_0 che incida sull'apparecchio con angolo ω . In un punto generico della sua traiettoria entro il ferro dei magneti la sua energia avrà un valore $E \leq E_0$, poiché per ionizzazione essa perde energia. Indicheremo con j la perdita di energia per cm di percorso, che supporremo costante ed uguale al valore minimo (la influenza di questa ipotesi verrà discussa insieme alle altre alla fine di questo numero);

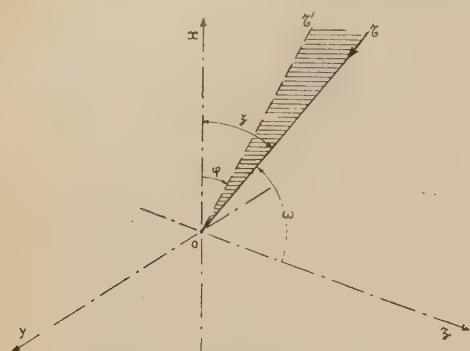


Fig. 3.

indicheremo poi con ρ il raggio di curvatura della T' e con ds un arco elementare su di essa, misurato in direzione concorde con la direzione positiva dell'asse x . Per la T' si hanno allora le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} E \sin \omega = eB\rho, \\ \sin \omega \frac{dE}{ds} = j, \end{cases}$$

dove e è la carica della particella; che si suppone dotata di energia tale che sia lecito trascurarne l'energia di riposo rispetto a quella cinetica.

La T' deve soddisfare le seguenti condizioni: se $y = y(x)$ è la sua equazione:

$$\begin{aligned} -r &\leq y(d) \leq r, \\ -r &\leq y(0) \leq r, \\ -r &\leq y(-d) \leq r. \end{aligned}$$

2-4. — Per la interpretazione delle misure eseguite con questo apparecchio ha importanza conoscere il numero di particelle dei due segni che arrivando sull'apparecchio con energia tra E_0 ed $E_0 + dE_0$ vengono da questo registrate. Questo numero dipende:

a) Dal numero $n_{\pm}(E_0, \omega, \varphi)$ di particelle del segno considerato che arrivano sull'apparecchio entro l'angolo solido elementare $d\Omega = d\omega \cdot d\varphi$, che hanno energia entro l'intervallo detto (nel seguito la funzione $n(E_0)$ assumerà la denominazione $o(E_0)$, $e(E_0)$, $v(E_0)$ a seconda che l'asse dell'apparecchio sarà puntato ad Ovest, ad Est, od in direzione verticale rispettivamente).

b) Dalla « sezione efficace » Σ che l'apparecchio presenta per le particelle di ciascuno dei due segni. Naturalmente Σ dipenderà dall'energia E_0 della particella, dagli angoli ω e φ che individuano la traiettoria, e dalle costanti geometriche dell'apparecchio: essa infine dipenderà dalla intensità e dal segno del campo magnetico B . Per ogni tipo di particelle esisteranno due funzioni, cioè Σ_e e Σ_d , a seconda che il campo entro i magneti sarà diretto a

convergere, rispettivamente divergere, le particelle di quel segno. Concludendo, il numero di particelle di *ciascun segno* registrate nella direzione ω, φ sarà:

$$n(E_0, \omega, \varphi) \cdot \Sigma \cdot dE_0 \cdot d\omega \cdot d\varphi.$$

Interessa ora conoscere la funzione $\Sigma = \Sigma(E_0, \omega, \varphi)$. Essa è data esattamente dall'integrale doppio:

$$\Sigma(E_0, \omega, \varphi) = \cos \zeta \iint dy dz,$$

che si deve intendere esteso a tutti quei valori delle variabili y e z per le quali la direzione della traiettoria è tale che essa tagli le tre aree sensibili A, B, C . Di questa espressione conviene sin da ora eseguire la integrazione rispetto a φ , che considereremo variabile entro limiti così ristretti ($\varphi \sim r/2 \ll 1$) per cui si possa trascurare la dipendenza di n da φ e porre $\cos \zeta \cong \sin \omega$; si avrà quindi:

$$\int \Sigma d\varphi = \sin \omega \iiint dy_1 dz_1 d\varphi_1.$$

L'indice 1 sta ad indicare che y_1 e z_1 , sono le coordinate sul piano dell'area A per cui passa la T .

Tenendo conto delle condizioni cui deve soddisfare la T'' , si può eseguire l'integrazione rispetto a z_1 , e si ottiene:

$$\int \Sigma d\varphi = \sin \omega (l - 2d | \cot \omega |) \iint dy_1 d\varphi_1.$$

È bene ripetere che l'integrale a secondo membro si deve intendere esteso a tutti i valori di y_1 , e di φ_1 , per cui la T' soddisfa le condizioni imposte. Nell'approssimazione già usata in cui $\cos \varphi \sim 1$, si potrà scrivere:

$$|y'_1| = \left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=d} \sim \varphi_1,$$

e quindi l'integrale detto diventa:

$$\iint dy_1 d\varphi_1 = \iint dy'_1 dy.$$

2-5. – Per il calcolo conviene introdurre le variabili adimensionali:

$$\xi = \frac{x}{d}; \quad \eta = \frac{y}{r},$$

ed i parametri adimensionali:

$$\sigma = \frac{\sin \omega}{eBj} E_0; \quad \gamma = \frac{r}{d} \frac{j}{eB},$$

ponendo poi:

$$ds \cong de \quad \text{e} \quad |1/\rho| \cong d^2y/dx^2,$$

le equazioni della T' danno luogo alla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \pm \frac{1}{|\gamma|} \frac{1}{\sigma + \xi - 1},$$

con le condizioni:

$$-1 \leq \eta \leq +1 \quad \text{nei punti} \quad \xi = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1. \end{cases}$$

L'integrale da calcolare con le nuove variabili diventa:

$$\iint dy_1 dy'_1 = \frac{r^2}{d} \iint d\eta_1 d\eta'_1 = \frac{r^2}{d} I,$$

avendo posto:

$$I = \iint d\eta_1 d\eta'_1.$$

Nel calcolo di questo integrale occorre distinguere i seguenti casi:

Caso C (I_c): la η è la soluzione dell'equazione differenziale T' presa con il segno negativo per $\eta > 0$ e con il segno positivo per $\eta < 0$. È questo il caso in cui il campo magnetico è diretto in verso tale da convergere le particelle che si considerano.

Caso D (I_d): la η è soluzione dell'equazione differenziale presa con il segno positivo per $\eta > 0$, e con il segno negativo per $\eta < 0$. È questo il caso in cui il campo magnetico è diretto in verso tale da divergere le particelle del segno considerato.

Per simmetria rispetto all'asse ξ basta considerare il problema in un semipiano. Si tratta di calcolare le traiettorie limite che saranno quelle che passano per i punti: $\xi = 0$; $\eta = \pm 1$ e $\xi = -1$; $\eta = \pm 1$. I valori di η_1 ed η'_1 di queste traiettorie delimitano il campo di integrazione.

Nel caso *D* poi che $\eta \cdot d^2\eta/d\xi^2 > 0$, le traiettorie limite possono essere solo di due tipi: quelle che nell'intervallo $-1 < \xi < +1$ non incontrano l'asse ξ , e quelle che l'incontrano in un unico punto ξ . Limite tra i due tipi di traiettorie sono quelle che risultano tangenti all'asse ξ in un punto ξ_0 . Indicando con gli indici (1) e (2) i valori delle variabili relativi al primo e secondo tipo di traiettorie, si ha:

$$I_d = 2 \left[\int \eta_1^{(2)} d\eta_1^{(2)} - \int \eta_1^{(1)} d\eta_1^{(1)} \right],$$

ed i limiti di integrazione vanno scelti in modo da coprire l'intero campo di variabilità di η_1 , per ciascuno dei due tipi di traiettorie. Eseguite le integrazioni si trovano per $\sigma < \sigma_0$: $I_d = 0$; per $\sigma > \sigma_0$ i valori che sono indicati nella tab. I, e che sono validi per i valori indicati dei parametri.

TABELLA I. — Valori di I_c e I_d in funzione dell'energia E_0 per il caso di due lenti magnetiche per tre diversi valori del raggio r dei contatori, e per $eB = 4,65 \cdot 10^6$; $j = 11,59 \cdot 10^6$ eV/cm;

$d = 20$ cm.

E_0 (GeV)	I_c			I_d		
	$r = 1$	$r = 1,5$	$r = 2$	$r = 1$	$r = 1,5$	$r = 2$
0,51	—	3,47	2,46	—	0,00	0,00
0,56	—	5,42	6,07	—	0,00	0,00
0,69	5,71	6,37	5,73	0,00	0,00	0,00
0,93	6,60	5,47	4,67	0,00	0,03	0,20
1,16	5,87	4,67	4,02	0,00	0,21	0,40
1,39	5,19	4,16	3,61	0,07	0,43	0,71
1,85	4,30	3,53	3,15	0,36	0,76	1,01
2,32	3,79	3,19	2,89	0,61	0,99	1,21
3,48	3,15	2,76	2,57	1,02	1,31	1,47
4,54	2,84	2,56	2,42	1,25	1,47	1,60
9,30	2,41	2,28	2,21	1,61	1,73	1,80
18,57	2,20	2,13	2,10	1,79	1,88	1,90

Nel caso C si possono presentare come traiettorie limite sia quelle che passano per il punto $\xi = 0$, $\eta = 1$ sia quelle che passano per il punto $\xi = -1$, $\eta = 1$. Nei casi numerici considerati le traiettorie del primo tipo si possono trattare come quelle del caso D — non hanno cioè più di una intersezione con l'asse ξ — e lo stesso può dirsi delle altre per i casi $r = 2$ e $r = 1,5$. Per il caso $r = 1$ è invece possibile che si presentino traiettorie ad intersezione tripla con l'asse ξ , nel qual caso i calcoli vanno modificati di un termine correttivo di cui si è tenuto conto. Per i valori indicati dei parametri il calcolo dell'integrale I_c fornisce i valori riportati nella tab. I.

Nella tab. II si trovano i valori analoghi di I_c ed I_d per il caso in cui l'apparecchio sia costituito da una sola lente magnetica, e vengano registrate solo le coincidenze doppie tra due contatori posti sopra e sotto di essa (è il caso delle nostre coincidenze (A, B) e (B, C)). Nel seguito verranno utilizzati solo i dati relativi alle coincidenze (A, B, C) (tab. I) e per $r = 2$, tale essendo il raggio dei contatori usati in tutte le nostre misure.

TABELLA II. – Valori di I_c e I_d in funzione dell'energia di una sola lente magnetica per tre diversi valori del raggio r dei contatori, e per: $eB = 4,65 \cdot 10^6$; $j = 11,59 \cdot 10^6$ eV/cm; $d = 20$ cm.

E_0 (GeV)	I_c			I_d		
	$r = 1$	$r = 1,5$	$r = 2$	$r =$	$r = 1,5$	$r = 2$
0,28	22,25	15,55	12,28	0,00	0,00	0,15
0,35	15,87	10,33	9,21	0,00	0,35	0,89
0,46	11,31	8,43	7,18	0,40	1,19	0,74
0,69	7,88	6,44	5,78	1,42	2,14	2,55
0,93	6,63	5,68	5,23	2,03	2,62	2,93
0,39	5,59	5,03	4,76	2,67	3,09	3,30
1,86	5,14	4,75	4,55	3,00	3,32	3,48
2,32	3,89	4,58	4,43	3,20	3,46	3,59
3,48	4,57	4,38	4,28	3,47	3,64	3,73
4,64	4,42	4,28	4,20	3,60	3,73	3,80

2-6. – Da quanto precede, risulta che, note le funzioni I_c e I_d , il numero di particelle di un determinato segno che, incidendo sull'apparecchio in direzione ω e con energia E_0 , vengono da questo registrate, è dato da:

$$n(E_0, \omega) \sin \omega [l - 2d | \cot \omega |] I(\sigma) \cdot (r^2/d) .$$

Il numero di particelle di un segno che vengono registrate in tutte le direzioni permesse dalla geometria dell'apparecchio sarà uguale al valore precedente integrato su tutti i valori di ω da $\pi/2$ a ω_{\min} . Naturalmente le funzioni $I_c(\sigma)$, $I_d(\sigma)$ dipendono da ω per tramite di σ ; tuttavia per semplicità noi faremo le ipotesi seguenti:

a) la funzione di distribuzione $n(E_0, \omega)$ si può porre nella forma:

$$n(E_0, \omega) = n(E_0) \sin^2 \omega ;$$

b) la $I(\sigma)$ non dipende da ω .

In queste ipotesi si ha:

$$n(E_0) \cdot I(\sigma) \cdot \frac{r^2}{d} \int_{\pi/2}^{\omega_{\min}} \sin^3 \omega (l - 2d | \cot \omega |) d\omega = n(E_0) \cdot \Lambda \cdot I(\sigma) ,$$

dove si è indicato con Λ il parametro che dipende solo dalla geometria dell'apparecchio

$$(1) \quad \Lambda = \frac{r^2}{d} \int_{\pi/2}^{\omega_{\min}} \sin^3 \omega (l - 2d | \cot \omega |) d\omega ,$$

che nel nostro caso, per $r = 2$, $d = 20$, $l = 52$, $\omega_{\min} = \pi/4$ vale circa $3 \text{ cm}^2 \times \text{sterad}$.

2-7. — Nei calcoli che seguiranno noi considereremo per semplicità solo il contributo delle particelle che giungono perpendicolarmente all'apparecchio, e pertanto

$$\sigma = E_0/eBj.$$

Il numero totale di particelle registrate dall'apparecchio quando il campo è diretto a convergere le positive e divergere le negative sarà dato in queste ipotesi da:

$$(2) \quad N_+ = \Lambda \left[\int_{E_0 \text{ min}}^{\infty} n_+(E_0) I_c(\sigma) dE_0 + \int_{E_0 \text{ min}}^{\infty} n_-(E_0) I_d(\sigma) dE_0 \right],$$

mentre nel caso opposto in cui si convergono le negative e si divergono le positive si avrà:

$$(3) \quad N_- = \Lambda \left[\int_{E_0 \text{ min}}^{\infty} n_+(E_0) I_d(\sigma) dE_0 + \int_{E_0 \text{ min}}^{\infty} n_-(E_0) I_c(\sigma) dE_0 \right],$$

dove $n_{\pm}(E_0)$ indicano rispettivamente le funzioni di distribuzione delle particelle dei due segni rispettivamente.

2-8. — Per il calcolo delle espressioni (2) e (3) occorrerebbe conoscere gli spettri differenziali $n_{\pm}(E_0) dE_0$ dei mesoni μ dei due segni alle diverse quote ed agli angoli zenithali che caratterizzano le varie serie di misure da noi eseguite, i cui risultati verranno in seguito riassunti.

Come è stato pubblicato in una precedente nota (18), le esperienze da noi eseguite a 3500 m s.l.m. mostrano che l'« effetto di carica » definito dall'espressione (19)

$$\delta_N = 2 \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}, \quad N = \begin{cases} O & (\text{Ovest}), \\ E & (\text{Est}) \\ V & (\text{verticale}), \end{cases}$$

è positivo per $N = O$, ed è negativo per $N = E$, vale a dire che si osserva una prevalenza di particelle positive quando il telescopio è puntato ad Ovest, mentre ad Est prevalgono le particelle negative.

Ci proponiamo nel seguito di discutere se tale risultato può essere interpretato, come suggerito da JOHNSON (20), ammettendo che non sia trascurabile l'effetto del campo magnetico terrestre sui mesoni nella atmosfera.

(19) Indicheremo con l'espressione « effetto » δ il dato sperimentale mentre riserveremo l'espressione « eccesso » η all'effettiva prevalenza di particelle positive sulle negative. La definizione di η è ancora la (4) e coinciderebbe numericamente con δ qualora fosse $I_c = 1$; $I_d = 0$. È invece sempre $\eta_V > \delta_V$.

(20) T. H. JOHNSON: *Phys. Rev.*, **69**, 11 (1941); cfr. anche B. ROSSI: *Rend. Acc. Lincei*, **15**, 62 (1932).

2-9. – Riassumiamo qui tutte le ipotesi introdotte nella teoria approssimata dell'apparecchio precedentemente esposta. Sono state fatte le seguenti assunzioni:

1) Le particelle che si considerano hanno tutte energia molto maggiore dell'energia di riposo. Tale ipotesi non introduce un errore apprezzabile in quanto nel seguito considereremo soltanto mesoni μ di energia superiore a 0,5 GeV (tale è, per le triple, il taglio dell'apparecchio).

2) La perdita di energia per unità di percorso è costante. Tale ipotesi tende a sottovalutare l'azione convergente (o divergente) delle lenti magnetiche, in special modo per le particelle di bassa energia, in quanto la perdita di energia va aumentando al decrescere dell'energia.

3) Le particelle nelle lenti magnetiche non subiscono urti. L'effetto della diffusione diminuisce l'azione convergente o divergente dei magneti, e quindi compensa, in parte, l'errore commesso introducendo la ipotesi 2).

4) Le particelle incidono solo ortogonalmente all'apparecchio (ipotesi della « unidimensionalità »). Tale ipotesi è certamente quella che introduce l'errore maggiore, ma essa è resa necessaria se non si vuole rendere eccessivamente laboriosi i calcoli che seguiranno nei prossimi numeri.

3. – Deflessione di un mesone nel campo magnetico terrestre.

3-1. – L'effetto del campo magnetico terrestre sulle traiettorie dei mesoni nell'atmosfera si può schematicamente rappresentare come nella fig. 4. Da

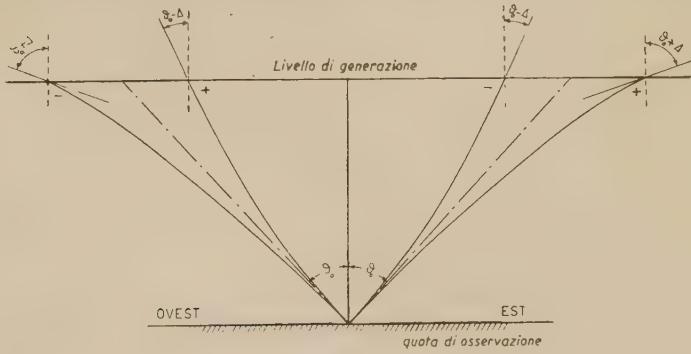


Fig. 4.

essa si vede che per particelle generate allo stesso livello, ad Ovest le negative percorrono una traiettoria più lunga delle positive, e l'opposto accade ad Est.

Ne viene di conseguenza che, anche prescindendo da altri effetti (eccesso positivo, effetto Est-Ovest della primaria), la curvatura delle traiettorie in-

introduce una asimmetria negli spettri dei mesoni dei due segni ad Est e ad Ovest.

3-2. — Ci proponiamo ora di calcolare quale deve essere la direzione iniziale — individuata dall'angolo zenithale $\theta(w, z)$ — della traiettoria di un mesone generato ad una quota z e con energia w affinché esso arrivi alla quota di osservazione z_0 con energia E_0 ed angolo zenithale θ_0 . Per eseguire tale calcolo considereremo soltanto mesoni μ ⁽²¹⁾ di energia $w \gg \mu c^2$ (ipotesi 1) del n. 2-8) le cui traiettorie giacciono in un piano verticale avente la direzione Est-Ovest (ipotesi 4) del n. 2-8), ed assumeremo che la componente del campo magnetico terrestre perpendicolare a tale piano sia costante in intensità in tutta l'atmosfera ed alla latitudine considerata ($45^\circ 50'$ latitudine Nord geografica) e corrisponda a 0,2 gauss.

Indicheremo con:

- l la distanza lungo una direzione inclinata di un angolo zenitale θ misurata in cm a partire dal livello del mare;
- $z = l \cos \theta$ la quota, anch'essa misurata in cm s.l.m.;
- $x(z, \theta)$ lo spessore in g/cm^2 che una particella proveniente dal limite dell'atmosfera deve attraversare per giungere alla quota z lungo una direzione inclinata θ ;
- W, w, E_0 rispettivamente le energie, misurate in GeV, al limite dell'atmosfera, al livello z , di generazione del mesone, ed alla quota di osservazione z_0 ⁽²²⁾;
- j la perdita di energia per unità di percorso che assumeremo costante (ipotesi 2) del n. 2-8) e pari a $1,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{GeV}}{\text{g/cm}^2}$;
- h l'altezza dell'atmosfera ridotta pari a $8 \cdot 10^5$ cm;
- $X = 1033 \text{ g/cm}^2$ la pressione atmosferica normale al l.d.m.

Con il valore prescelto per il campo magnetico, e considerando come al solito il caso relativistico, si ha:

$$\rho = \frac{W - jx(z, \theta)}{6 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} [W - jX \sec \theta \exp(-z/h)],$$

⁽²¹⁾ In realtà vengono creati mesoni π , ma se si escludono particelle di energia particolarmente elevata, che non interessano ai fini del presente calcolo, si può ritenere che tutti i mesoni π creati si disintegriano istantaneamente in mesoni μ , e si può quindi prescindere dalla disintegrazione $\pi \rightarrow \mu$.

⁽²²⁾ L'energia W non ha significato fisico, ma la sua introduzione è utile al fine di semplificare le formule che seguiranno.

dove le energie si intendono misurate in GeV e si è posto:

$$(5) \quad x(z, \theta) = X \sec \theta \exp(-z/h).$$

Indicheremo ora con $\Delta(w, x_0, x)$ l'angolo tra la tangente alla traiettoria al livello z di generazione e la tangente al livello x_0 di osservazione. Approssimando ora gli elementi di areo con le rispettive tangenti lungo la traiettoria, l'angolo di deviazione $\Delta(w, x_0, x)$, espresso in radianti, risulta:

$$(6) \quad \Delta(w, x_0, x) \cong \int_{i_0}^l \frac{dl'}{\rho} = 6 \cdot 10^{-8} \int_{i_0}^l \frac{dl'}{W - jX \sec \theta_0 \cdot \exp(-l' \cos \theta_0/h)} = \\ = \frac{6 \cdot 10^{-8} h}{W \cos \theta_0} \ln \left[\exp \left(\frac{z - z_0}{h} \right) \cdot \frac{w}{E_0} \right],$$

dove:

$$W = E_0 + jx_0 = E_0 + jX \sec \theta_0 \exp(-z_0/h).$$

Il valore di w da cui dipende Δ , a rigore risulterebbe esso stesso funzione di Δ . Infatti, se indichiamo con $\theta_> = \theta_0 + \Delta$ l'angolo zenithale di un mesone positivo proveniente da Est o negativo proveniente da Ovest (vedi fig. 4), e rispettivamente $\theta_< = \theta_0 - \Delta$ negli altri due casi, i valori di w sono dati da:

$$(7) \quad w_z = W_z - jX \sec \theta_z \cdot \exp(-z/h),$$

con:

$$(8) \quad W_z = E_0 + jX \sec \theta_z \cdot \exp(-z_0/h).$$

Però, considerando che nella (6) w_z compare in una espressione logaritmica e che $\sec \theta_z \cong \sec \theta_0$, potremo porre senza grave errore:

$$W_z \cong w = W - jX \sec \theta_0 \exp(-z/h).$$

In questa approssimazione si ha per $\Delta(w, x_0, x)$ l'espressione:

$$(9) \quad \Delta(w, x_0, x) = \frac{0,48}{W \cos \theta_0} \ln \left(\frac{x_0 \cos \theta_0}{x \cos \theta_z} \frac{w}{E_0} \right),$$

dove si è tenuta presente la (5).

3-3. – Un calcolo simile al precedente è stato effettuato da JOHNSON ⁽²⁰⁾, ma in esso si suppone che i mesoni siano generati al limite dell'atmosfera ed inoltre si trascura l'angolo di deviazione che avrebbe subito la traiettoria di un mesone, qualora questo non avesse perduto energia per ionizzazione. Secondo JOHNSON infatti, il campo magnetico terrestre non introdurrebbe alcuna asimmetria sugli spettri mesonici e quindi il fatto osservato che la asimmetria Est-Ovest sui mesoni di un solo segno risulti funzione dell'angolo zen-

tal^e (1), (13), (23), deriverebbe unicamente dalle perdite di energia per ionizzazione. Noi riteniamo invece che, anche in assenza di esse vi sarebbe una asimmetria causata dalla disintegrazione dei mesoni μ di cui non si tien conto n^e della predetta teoria, n^e nella nota di GROETZINGER e McCCLURE (7). Ne viene di conseguenza che gli angoli di deflessione da noi calcolati risultano maggiori di quelli calcolati da JOHNSON.

Nella tab. III vengono riportati i valori di Δ in funzione della energia E_0 alla quota $z_0 = 3500$ m e per un angolo zenithale $\theta_0 = 60^\circ$. Tali angoli sono stati calcolati per mezzo della (9) assumendo un livello di generazione $x \cos \theta_z$ costante e pari a 100 g/cm². Poich^e in realtà la generazione non avviene ad una quota costante, tali dati vanno interpretati come deviazioni mediate sulle varie quote di generazione.

TABELLA III. — *Angoli di deflessione per un mesone che giunge alla quota $z_0 = 3500$ con una inclinazione $\theta_0 = 60^\circ$ in funzione dell'energia E_0 (la quota di generazione è considerata costante: $x \cos \theta_z = 100$ g/cm²).*

E_0 (GeV)	0,51	0,93	1,39	2,32	3,48	4,64	9,30	18,57
$\Delta(E_0)$ (gradi)	6,45	5,06	3,57	2,93	2,32	1,75	0,98	0,55

4. — Spettro differenziale della componente mesonica in direzione inclinata e verticale.

4-1. — Se si indica con (24): $[F(w, x, \theta) dx]_z$ il numero di mesoni di ciascun segno generati tra x e $x + dx$ con energia w_z ed inclinazione θ_z , il numero di tali mesoni che giunge alla quota z_0 con energia E_0 legata a w_z dalle (7) e (8) e con inclinazione θ_0 è dato da:

$$(10) \quad [f(E_0, x_0, \theta_0, x) \cdot dx]_z = [p(w, x, \theta) F(w, x, \theta) \cdot dx]_z ,$$

dove si è indicato con $[p(w, x, \theta)]_z$ la probabilità che un mesone generato in x con energia w ed inclinazione θ_z arrivi alla quota z_0 senza disintegrarsi.

(23) J. C. STEARNS e D. C. FROMAN: *Phys. Rev.*, **46**, 535 (1934); T. H. JOHNOSN: *Phys. Rev.*, **48**, 287 (1935).

(24) D'ora in poi l'indice z accanto alle parentesi s'intende riferito a tutte le grandezze contenutevi che dipendono da θ_z .

Il numero di mesoni generati in tutta l'atmosfera e che giunge alla quota z_0 , con inclinazione θ_0 , con energia compresa tra E_0 ed $E_0 + dE_0$ è quindi dato da:

$$[n(E_0, x_0, \theta_0) \cdot dE_0]_z = dE_0 \left[\int_0^{x_0} f(E_0, x, \theta_0) \cdot dx \right]_z.$$

Riferendosi ai mesoni di un solo segno, ed indicando rispettivamente con $e_+(E_0, x_0, \theta_0) dE_0$, $o_+(E_0, x_0, \theta_0) dE_0$, $v_+(E_0, x_0, \theta_0) dE_0$ gli spettri differenziali in direzione Est, Ovest od in direzione verticale, possiamo scrivere (fig. 4):

$$(11) \quad \begin{cases} e_+(E_0, x_0, \theta_0) dE_0 \\ o_-(E_0, x_0, \theta_0) dE_0 \end{cases} = dE_0 \left[\int_0^{x_0} f_+(E_0, x, \theta_0) dx \right]_> \\ \begin{cases} e_-(E_0, x_0, \theta_0) dE_0 \\ o_+(E_0, x_0, \theta_0) dE_0 \end{cases} = dE_0 \left[\int_0^{x_0} f_-(E_0, x, \theta_0) dx \right]_< \\ v_\pm(E_0, x_0, \theta_0) dE_0 = dE_0 \left[\int_0^x f_\pm(E_0, x, \theta_0) dx \right]_0. \end{cases}$$

4-2. – Come è ben noto, se df/dt è la derivata rispetto al tempo della funzione f di distribuzione dei mesoni, e τ la vita media apparente si ha:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{f}{\tau},$$

da cui, nell'ipotesi che sia trascurabile l'energia di riposo μc^2 di fronte alla energia totale dei mesoni:

$$\frac{df}{f} = \frac{\mu c^2}{\tau_0 c} \frac{dl'}{W - jX \sec \theta_z \exp [-l' \cos \theta_z / h]}$$

con $\tau_0 = 2,15 \text{ } \mu\text{s}$. Posto ora per semplicità $b_z = (\mu c^2 h) / (\tau_0 c \cos \theta_z) = 1,115 \text{ sec } \theta_z$ ed integrando, si ottiene:

$$(12) \quad [\ln p]_z = \left[\frac{b}{w} \ln \left(\frac{x E_0}{x_0 w} \right) \right]_z,$$

dove si è posto nel termine logaritmico $(\cos \theta_z / \cos \theta_0) \sim 1$, e W_z , w_z sono definiti dalle (7) e (8).

Si noti che, poichè θ_z rappresenta rispettivamente la massima o la minima inclinazione che compete alla traiettoria, l'aver assunto le (7) e (8) comporta una esaltazione dell'effetto del campo magnetico terrestre, poichè equivale a confondere l'arco di traiettoria con una retta di inclinazione θ_z .

4-3. – Si tratta ora di specificare la funzione $F(w, x, \theta)$ per la quale faremo le seguenti ipotesi:

a) la radiazione primaria generatrice di mesoni è isotropa, cosicchè la funzione F risulta indipendente in forma esplicita da θ ;

b) la generazione avviene, come suggerito da HEITLER (15), (16) per urti successivi, ed in ogni urto viene emesso un solo mesone (generazione plurima);

c) i mesoni vengono creati nell'urto nucleone-nucleone secondo lo schema (18):

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1) P + P = \left\{ \begin{array}{l} P + P + \pi^0, \\ P + N + \pi^+, \end{array} \right. \\ 2) N + N = \left\{ \begin{array}{l} N + N + \pi^0, \\ P + N + \pi^-, \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 3) N + P = \left\{ \begin{array}{l} P + N + \pi^0, \\ P + P + \pi^-, \end{array} \right. \\ 4) P + N = \left\{ \begin{array}{l} N + N + \pi^+; \\ \end{array} \right. \\ 5) N + P = \left\{ \begin{array}{l} P + N + \pi^0, \\ P + P + \pi^-, \end{array} \right. \\ 6) P + N = \left\{ \begin{array}{l} N + N + \pi^+; \\ \end{array} \right. \\ 7) P + N = \left\{ \begin{array}{l} N + N + \pi^+; \\ \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

d) le probabilità u_1, u_2, \dots, u_7 , dei processi sopra elencati, si considerano indipendenti dalla energia del nucleone incidente (25);

e) in accordo con la teoria mesonica simmetrica delle forze nucleari assumeremo che la probabilità dei processi differiscano solo nel caso in cui venga emesso un mesone carico oppure un neutretto, il che significa porre $u_2 = u_4$ e $u_6 = u_7$;

f) la frazione di energia del nucleone incidente ceduta al mesone è costante; indicando con w_π l'energia di un mesone alla generazione e con E l'energia del nucleone incidente (26), si porrà dunque $w_\pi = E/k$.

4-4. – Con queste ipotesi, se si indicano con $P(E, x)$, $N(E, x)$ il numero di protoni e neutroni di energia E presenti alla quota x , per unità di energia, angolo solido, superficie, e di tempo, si potrà scrivere:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_+(w, x) du = \frac{1}{2} [(u_2 + u_7) P(E, x) + u_7 N(E, x)] dx, \\ F_-(w, x) dx = \frac{1}{2} [(u_4 + u_6) N(E, x) + u_6 P(E, x)] dx, \end{array} \right.$$

dove il fattore $1/2$ deriva dall'aver preso uguali le percentuali di protoni e di neutroni rispetto al numero totale di nucleoni presenti nell'atmosfera.

(25) È ovviamente: $u_1 + u_2 = u_3 + u_4 = u_5 + u_6 + u_7 = 1$.

(26) Si deve intendere che sia E maggiore o uguale al valore E_φ del taglio operato dal campo magnetico terrestre sullo spettro dei protoni primari ad una latitudine – nel nostro caso $E_\varphi = 2,5$ GeV).

Come è stato dimostrato sia teoricamente (27) che sperimentalmente (28), i neutretti non danno alcun contributo alla componente mesonica in quanto disintegrono con una vita media assai breve in due quanti γ . I mesoni π invece disintegrono quasi istantaneamente (almeno che non abbiano energie estremamente elevate) con una vita media dell'ordine di 10^{-8} s in mesoni μ cui compete una energia $w \approx 0,8w_z$ (29).

4-5. — Le funzioni di distribuzione dei nucleoni $P(E, x)$ e $N(E, x)$ sono date (18) dalle espressioni:

$$(15) \quad \begin{cases} P(E, x) = \frac{1}{2} P_0 E^{-\gamma} [\exp(-\alpha x) + \exp(-\beta x)], \\ N(E, x) = \frac{1}{2} P E^{-\gamma} [\exp(-\alpha x) - \exp(-\beta x)], \end{cases}$$

con α^{-1} cammino di assorbimento della componente nucleonica che noi assumeremo pari a 125 g/cm² (30), e β^{-1} cammino libero della componente nucleonica legato alla sezione d'urto σ per produzione di mesoni dalla relazione $\beta^{-1} = n\sigma$ dove n è il numero di nuclei per grammo; il valore più attendibile per β^{-1} è 50 g/cm² (16); γ è ordinariamente assunto uguale a $2,8$, e noi ci atterremo a tale valore.

Va osservato che per $x = 0$, ossia al limite dell'atmosfera si ha:

$$(16) \quad P(E, 0) = P_0 E^{-\gamma}; \quad N(E, 0) = 0.$$

Inserendo la (15) nella (14), ne segue per l'ipotesi *e*) del n. 4-3:

$$(17) \quad F_{\pm}(w, x) dx = \mu \left[\exp(-\alpha x) \pm \frac{1}{2} v \exp(-\beta x) \right] w^{-\gamma} dx,$$

dove si posto per semplicità:

$$(18) \quad \mu = \frac{P_0 (k/0,8)^{-\gamma}}{4} (u_2 + 2u_7); \quad v = \frac{2u_2}{u_2 + 2u_7}.$$

(27) R. FINCKELSTEIN: *Phys. Rev.*, **72**, 415 (1947); M. VERDE: *Ric. Scient.*, **17**, 2031 (1947); J. P. STEINBERGER: *Phys. Rev.*, **76**, 1180 (1949).

(28) M. F. CAPLON, W. PETERS e H. L. BRADT: *Phys. Rev.*, **79**, 1735 (1949); R. E. MARSHAK: *Phys. Rev.*, **76**, 1736 (1949); R. BJORKLUND, W. E. CRANDALL, B. J. MAYER e H. F. YORK: *Phys. Rev.*, **77**, 213 (1950).

(29) G. M. LATTES, G. P. S. OCCHIALINI e C. F. POWELL: *Nature*, **160**, 413 (1947); **160**, 486 (1947).

(30) I valori sperimentali sono compresi tra 95 e 135 g/cm², ed il valore più ragionevole sembra sia compreso tra 120 e 130 g/cm²; cfr. G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nuovo Cimento*, **6**, 457 (1949); G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **71**, 453 (1947); J. TINLOT: *Phys. Rev.*, **78**, 1478 (1948).

4-6. — Alle formule precedenti si può giungere anche con una teoria fenomenologica della produzione plurima, quale quella svolta da BASSI, CLEMENTEL, FILOSOFI e PUPPI (10). Secondo questi Autori ammettendo che un nucleone abbia la stessa probabilità di ritenere la propria carica o cederla al mesone (31), il che equivale a porre $u_2 = 1/2$ e $u_7 = 1/4$ e quindi per la (18)

$$\mu = \frac{P_0(k/0,8)^{-\gamma}}{4} \quad \text{e} \quad \nu = 1 ,$$

si può immaginare che i mesoni vengano creati da due « sorgenti » distinte: l'una responsabile dell'eccesso positivo prevalentemente localizzata nella zona del primo urto, la seconda che non contribuisce all'eccesso positivo in quanto nei successivi urti i mesoni verrebbero generati da protoni e neutroni in ugual numero. Questi Autori assumono inoltre che ν sia una funzione dell'energia del tipo

$$\nu(w) = \nu_0 w^{-c} ,$$

con ν_0 , c costanti; l'esponente c più adatto ad interpretare i loro dati sperimentali è $c = 1/2$. Noi riteniamo che l'assumere $\nu = \nu(w)$ sia in contrasto con la ipotesi della generazione plurima, in quanto, come si è visto, dovrebbe risultare $\nu = 1$. Inoltre il contrasto è più evidente se si tien conto che una dipendenza del tipo $w^{-1/2}$ è caratteristica delle teorie di HEISENBERG (14) e WATAGHIN (32) di generazione multipla.

4-7. — Lasciando indeterminate le costanti μ e ν , che ci proponiamo di determinare confrontando i dati teorici con i nostri risultati sperimentali, dedurremo ora l'espressione che fornisce il numero di mesoni positivi e negativi $[f_+(E, x_0, \theta_0, x) dx]_z$ generati fra x e $x + dx$, che giungono alla quota z_0 con energia E_0 .

Tenendo presente l'espressione (12) della probabilità $[p(w, x, \theta)]_z$ e la (17) si ha dalla (10)

$$[f_+(E_0, x_0, \theta_0, x) dx]_z = \mu \left\{ \left(\frac{x E_0}{x_0 w} \right)^{b/W} \left[\exp(-\alpha x) + \frac{1}{2} \nu \cdot \exp(-\beta x) \right] w^{-\gamma} dx \right\}_z ,$$

$$[f_-(E_0, x_0, \theta_0, x) dx]_z = \mu \left\{ \left(\frac{x E_0}{x_0 w} \right)^{b/W} \left[\exp(-\alpha x) - \frac{1}{2} \nu \cdot \exp(-\beta x) \right] w^{-\gamma} dx \right\}_z .$$

Di conseguenza gli spettri differenziali (11) dei mesoni di ciascun segno assu-

(31) E. CLEMENTEL e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **5**, 529 (1948).

(32) G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **56**, 1245 (1939); M. CINI e G. WATAGHIN: *Nuovo Cimento*, **7**, 135 (1950).

mono la forma:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & e_+(E_0, x_0, \theta_0) dE_0 \\ & o_-(E_0, x_0, \theta_0) dE_0 \end{aligned} \right\} = \\ & = \frac{\mu}{\alpha} \left[\left(\frac{E_0}{\alpha x_0} \right)^{b/W} dw \int_0^{\alpha x_0} (\alpha x)^{b/W} \exp(-\alpha x) w^{-(r+b/W)} d(\alpha x) \right]_> \pm \\ & \pm \frac{\mu}{2\beta} \left[\left(\frac{E_0}{\beta x_0} \right)^{b/W} dw \int_0^{\beta x_0} (\beta x)^{b/W} \exp(-\beta x) w^{-(r+b/W)} d(\beta x) \right]_> , \end{aligned}$$

e le funzioni $e_-(E_0, x_0, \theta_0)$ ed $o_+(E_0, x_0, \theta_0)$ andranno invece calcolate per $\theta = \theta_<$ e le $v_{\pm}(E_0, x_0, O)$ ponendo $\cos \theta_z = \cos \Delta \sim 1$.

Nell'esecuzione della integrazione rispetto a x faremo le seguenti approssimazioni:

1) considereremo la funzione $\theta_z = \theta_0 \pm \Delta(w, x)$ indipendente da x assumendo per Δ i valori della tab. III ricavati nella ipotesi di un livello di generazione costante $x \cos \theta_z = 100 \text{ g/cm}^2$. Ciò è giustificato dal fatto che $\Delta(w, x)$, funzione logaritmica del livello di generazione, può ritenersi quasi costante dato che la maggior parte di mesoni viene generata nell'intorno di 100 g/cm^2 .

2) Assumeremo $w_z \sim W_z$, il che, per la (7), significa confondere l'energia al livello di generazione con l'energia al limite dell'atmosfera.

3) Per entrambi gli integrali porremo uguale ad infinito il limite superiore di integrazione. Quest'ultima approssimazione introduce un errore tanto maggiore quanto minore è lo spessore che sovrasta l'apparecchio.

Con questa approssimazione l'integrale rispetto a x diventa la funzione $\Gamma(1 + b/W)$, e si hanno pertanto, posto

$$(19) \quad \varphi(W_z) = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{E_0}{\rho x_0 W} \right)^{b/W} W^{-\gamma} \Gamma(1 + b/W) \right]_z ; \quad \rho = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

le seguenti espressioni per gli spettri differenziali:

$$(20) \quad \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & e_+(E_0, x_0, O_0) dE_0 \\ & o_-(E_0, x_0, O_0) dE_0 \end{aligned} \right\} = \mu \left[\varphi_\alpha(W_>) \pm \frac{\nu}{2} \varphi_\beta(W_>) \right] dW_> , \\ & \left. \begin{aligned} & e_-(E_0, x_0, O_0) dE_0 \\ & o_+(E_0, x_0, O_0) dE_0 \end{aligned} \right\} = \mu \left[\varphi_\alpha(W_<) \mp \frac{\nu}{2} \varphi_\beta(W_<) \right] dW_< , \\ & v_{\pm}(E_0, x_0, O) dE_0 = \mu \left[\varphi_\alpha(W_0) \mp \frac{\nu}{2} \varphi_\beta(W_0) \right] dW_0 . \end{aligned}$$

Da queste funzioni, mediante integrazione, si può calcolare il numero di mesoni di energia superiore ad un certo valore W^* che *incidono* sull'apparecchio.

recchio per unità di superficie, di angolo solido e di tempo. Tenendo presente la (8) si ha:

$$(21) \quad W_{\frac{z}{0}}^* = 0,5 + 1,86 \sec \theta \exp(-z_0/h), \quad \theta = \begin{cases} \theta_> \\ \theta_< \\ 0, \end{cases}$$

in cui 0,5 rappresenta l'energia di taglio dell'apparecchio.

In definitiva per gli integrali si hanno le espressioni:

$$(22) \quad \begin{cases} E_+(x_0, \theta_0) \\ O_-(x_0, \theta_0) \end{cases} = \mu \left(\Phi_a \pm \frac{\nu}{2} \Phi_\beta \right)_>, \\ \begin{cases} E_-(x_0, \theta_0) \\ O_+(x_0, \theta_0) \end{cases} = \mu \left(\Phi_a \mp \frac{\nu}{2} \Phi_\beta \right)_<, \\ V_\pm(x_0, O) = \mu \left(\Phi_a \pm \frac{\nu}{2} \Phi_\beta \right)_0, \end{cases}$$

dove:

$$(23) \quad (\Phi)_{\frac{z}{0}} = \int_{W_{\frac{z}{0}}^*}^{\infty} \varphi_\rho(W_{\frac{z}{0}}) dW_{\frac{z}{0}}, \quad \rho = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

e $\varphi_\rho(W_{\frac{z}{0}})$ è definito dalla (19).

5. - Calcolo delle frequenze di mesoni registrate dall'apparecchio e confronto con i dati sperimentali.

5-1. - Dalle ultime espressioni, ricavate nel precedente numero, sarebbe possibile ricavare il valore dell'eccesso positivo

$$\eta_N = \frac{2(N_+ - N_-)}{N^+ + N^-}, \quad N = \begin{cases} E \\ O \\ V, \end{cases}$$

nelle varie condizioni sperimentali qualora fosse noto il valore del parametro ν . Nel presente numero cercheremo di ricavare il valore di tale parametro dal diretto confronto tra le espressioni dedotte per via teorica, con i dati forniti dalla esperienza; ci riserviamo viceversa di ricavare i valori dell'eccesso positivo nel prossimo numero.

5-2. - Osserviamo che le espressioni (22) forniscono, come abbiamo detto, le intensità dei mesoni che *incidono* sull'apparecchio nelle varie condizioni sperimentali. Per calcolare il numero di coincidenze triple (A, B, C) registrate nell'unità di tempo, occorrerà non solo tener conto del fattore geometrico Λ

definito dalla (1) del n. 2-6, ma anche della efficienza dell'apparecchio a discriminare le particelle dei due segni, secondo la teoria esposta nel n. 2. Per questo scopo occorre introdurre le funzioni (20) nelle espressioni (2) e (3) rispettivamente. Se si indica per brevità con

$$(24) \quad [C_\varrho(z_0, \theta)]_{\frac{z}{\theta}} = \int_{W_{\frac{z}{\theta}}^*}^{\infty} I_c(W_{\frac{z}{\theta}}) \varphi_\varrho(W_{\frac{z}{\theta}}) dW_{\frac{z}{\theta}},$$

e con:

$$[D_\varrho(z_0, \theta)]_{\frac{z}{\theta}} = \int_{W_{\frac{z}{\theta}}^*}^{\infty} I_d(W_{\frac{z}{\theta}}) \varphi_\varrho(W_{\frac{z}{\theta}}) dW_{\frac{z}{\theta}},$$

$(W_{\frac{z}{\theta}}^*$ è definito dalla (21)), si avrà pertanto:

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{E'_+(z_0, \theta_0)}{O'_-(z_0, \theta_0)} = \Lambda \mu \left\{ C_a(x_0, \theta_>) \pm D_a(x_0, \theta_>) \pm \frac{1}{2} \nu [C_\beta(x_0, \theta_>) - D_\beta(x_0, \theta_>)] \right\}, \\ \frac{E'_-(z_0, \theta_0)}{O'_-(z_0, \theta_0)} = \Lambda \mu \left\{ C_a(x_0, \theta_>) \pm D_a(x_0, \theta_>) \mp \frac{1}{2} \nu [C_\beta(x_0, \theta_>) - D_\beta(x_0, \theta_>)] \right\}, \\ V'_\pm(z_0, O) = \Lambda \mu \left\{ C_a(x_0, O) \pm D_a(x_0, O) \pm \frac{1}{2} \nu [C_\beta(x_0, O) - D_\beta(x_0, O)] \right\}. \end{cases}$$

Si noti che questi valori contraddistinti con apice si differenziano dagli analoghi (22) senza apice per il fatto che si è tenuto conto che l'efficienza dell'apparecchio è inferiore all'unità. Ovviamente se tale efficienza raggiungesse l'unità ($I_c = 1$, $I_d = 0$) le (24) coinciderebbero con le (23) e le (25) sarebbero nulle, vale a dire:

$$[C_\varrho(z_0, \theta)]_{\frac{z}{\theta}} = (\Phi_\varrho)_{\frac{z}{\theta}}, \quad [D_\varrho(z_0, \theta)]_{\frac{z}{\theta}} = 0,$$

e le espressioni (26) verrebbero a coincidere con le (22) a meno del fattore geometrico costante Λ .

5-3. – Per il confronto con i dati sperimentali introduciamo le seguenti funzioni:

$$(27) \quad \begin{cases} \lambda' = \frac{E'_+ + V'_+ + O'_+}{E'_- + V'_- + O'_-}; & \delta'_N = 2 \frac{N'_+ + N'_-}{N'_+ + N'_-}; & N' = \begin{cases} E' \\ O' \\ V' \end{cases} \\ a'_\pm = O'_\pm / E'_\pm; & a' = \frac{O'_+ + O'_-}{E'_+ + E'_-}; \\ \rho' = O'_+ / E'_-; & \varepsilon' = O'_- / E'_+; \\ \varepsilon'_0 = O'_+ / O'_-; & \varepsilon'_e = E'_+ / E'_-; \end{cases}$$

che dipendono dal parametro ν oltre che dalle variabili z_0 e θ_0 . Determineremo ora ν imponendo separatamente che le grandezze λ' e δ_V' , strettamente connesse con l'eccesso positivo (33), coincidano con i rispettivi valori sperimentali λ_{sp} e δ_{Vsp} .

Si osservi che per la sua stessa definizione il valore di ν non dipende dalla quota né dall'angolo zenithale e deve pertanto essere uguale in tutte le misure.

Dalle (26) e (27) segue che:

$$(28) \quad \nu_{\delta_V} = \frac{C_\alpha(x_0, O) + D_\alpha(x_0, O)}{C_\beta(x_0, O) - D_\beta(x_0, O)} \delta_{Vsp} ; \quad \nu_\lambda = 2 \frac{(C_\alpha + D_\alpha)(\lambda_{sp} - 1)}{(C_\beta - D_\beta)(\lambda_{sp} + 1)},$$

dove:

$$C_\varrho = C_\varrho(x_0, \theta_>) + C_\varrho(x_0, \theta_<) + C_\varrho(x_0, O), \quad \varrho = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

ed analogo significato ha D_ϱ .

Nella tab. IV vengono riportati insieme con i valori sperimentali δ_{Vsp} , λ_{sp} i valori di ν_{δ_V} , ν_λ calcolati per mezzo delle (28). Da essa si può vedere che nonostante i forti errori sperimentali relativi alle misure eseguite in aereo, i quattro valori ricavati per ν coincidono entro gli errori. È pertanto giustificato assumere per ν il valore medio che si trae dalle quattro determinazioni:

$$(29) \quad \nu = 0,87 \pm 0,04,$$

dove l'errore indicato è l'errore quadratico medio calcolato sulle quattro misure. Tale valore numerico coincide con quello che si avrebbe dalla teoria ammettendo la equiprobabilità dei processi (13) di generazione.

TABELLA IV. – Valori di ν desunti dai dati sperimentali λ_{sp} δ_{sp} alle varie quote.

z_0 (m s.l.m.)	3 500	5 100	7 300
δ_{Vsp}	$0,123 \pm 0,004$	$0,128 \pm 0,030$	$0,117 \pm 0,035$
ν_{δ_V}	$0,87 \pm 0,07$	$0,98 \pm 0,22$	$0,81 \pm 0,22$
λ_{sp}	$1,12 \pm 0,01$	—	—
ν_λ	$0,85 \pm 0,03$	—	—

5-4. – La conoscenza di ν ci permette ora di eseguire un confronto tra le grandezze (27) calcolate per $\theta_0 = 60^\circ$ e $z_0 = 3500$ m ed i rispettivi valori sperimentali. Il risultato di tali calcoli è riportato nella seconda riga della

(33) La scelta di queste grandezze è suggerita dal fatto che esse non risentono l'azione del campo magnetico terrestre, come invece le δ_e e δ_0 .

tab. V mentre i dati sperimentali sono riassunti nella prima riga. Nella terza riga sono invece riportati i valori delle stesse grandezze calcolati assumendo un livello di generazione costante pari a 100 g/cm².

TABELLA V. — *Confronto fra i dati calcolati ed i valori sperimentali*
 $\nu = 0,87$, $\theta_0 = 60^\circ$, $z_0 = 3500$ m.

	a_+	a_-	a	ε_0	ε_e	ρ	τ
Valori sperimentali	$1,31 \pm 0,02$	$0,97 \pm 0,01$	$1,13 \pm 0,02$	$1,25 \pm 0,01$	$0,93 \pm 0,01$	$1,21 \pm 0,02$	$1,04 \pm 0,01$
Valori calcolati dalle (26)	1,31	0,77	1,00	1,40	0,81	1,07	0,94
Valori calcolati con livello di generaz. cost.	1,38	0,77	1,00	1,45	0,81	1,11	0,95

Il confronto tra i dati sperimentali e i dati calcolati, si può ritenere soddisfacente, ove si tenga conto dei seguenti fatti:

a) L'asimmetria Est-Ovest A della radiazione primaria. Essa è legata alla grandezza a definita da una delle (27) dalla seguente relazione:

$$A = \frac{2(a-1)}{a+1}.$$

Dai dati sperimentali si ha:

$$A = 0,12 \pm 0,02,$$

mentre si è assunto nei calcoli, per ipotesi, $A = 0$. Per conseguenza dobbiamo attenderci che i valori sperimentali delle grandezze a , ρ , τ debbano risultare maggiori dei corrispondenti valori calcolati ⁽³⁴⁾.

b) Come già stato osservato nel n. 4-2, si è sempre approssimato con una retta l'arco di curva relativo dalle traiettorie stesse al livello di generazione. Ciò porta ad una sopravalutazione dell'effetto del campo magnetico terrestre sulle traiettorie mesoniche, e pertanto il calcolo fornisce valori per eccesso delle grandezze O_+ ed E_- e per difetto delle grandezze O_- ed E_+ . Di conseguenza risulta ε_0 maggiore ed ε_e minore dei rispettivi dati sperimentali.

⁽³⁴⁾ Si osservi che le grandezze A , ρ , τ , risultano indipendenti dalla curvatura delle traiettorie mesoniche in quanto si riferiscono a traiettorie simmetriche.

c) A causa dell'eccesso positivo dovrebbe avversi, come risulta dal calcolo $\tau < 1$. Tuttavia il valore sperimentale trovato può essere giustificato pensando che l'asimmetria Est-Ovest sulla primaria sia tale da compensare quasi completamente l'effetto dovuto all'eccesso positivo.

6. – **Deduzione dell'eccesso positivo η e della frazione di energia ceduta dal nucleone incidente al mesone.**

6-1. – Dalle formule (22) segue che l'« *eccesso positivo integrale* » quale si misurerebbe con il nostro apparecchio in direzione verticale qualora avesse efficienza 1 nel discriminare le particelle dei due segni, è dato da

$$\eta_V = 2 \frac{V_+ - V_-}{V_+ + V_-} = \nu [\Phi_\beta / \Phi_\alpha]_0.$$

Mediante questa espressione e assumendo per ν il valore dato dalla (29), si è calcolato l'*eccesso positivo integrale* (energia di taglio 0,5 GeV) al l.d.m.; a 3500 m; 5100 m; e 7300 m s.l.m. Tali valori sono riportati nella tab. VI insieme ai valori η'_{δ_V} calcolati dalle nostre misure assumendo un livello di generazione costante e pari a 100 g/cm², come sarà detto tra breve. L'eccesso positivo η'_{δ_V} al livello del mare è stato invece calcolato dal nostro effetto sperimentale δ_{sp} misurato a Guidonia (88 m s.l.m.) (3) assumendo come spettro mesonico quello di WILSON (35).

TABELLA VI. – *Eccesso positivo in funzione della quota.*

z_0 (m s.l.m.)	88	3500	5100	7300
η_V (36)	$0,23 \pm 0,01$	$0,25 \pm 0,01$	$0,23 \pm 0,01$	$0,23 \pm 0,01$
η'_{δ_V}	$(0,15 \pm 0,03)$	$0,21 \pm 0,02$	$0,22 \pm 0,05$	$0,18 \pm 0,05$

Per quanto riguarda i valori di η in direzione inclinata a 3500 m dalle (22) si ha:

$$\eta_0 = 0,66 \pm 0,03; \quad \eta_E = -0,19 \pm 0,01.$$

Queste grandezze non rappresentano però l'eccesso positivo perchè ad esse si

(35) J. G. WILSON: *Nature*, **158**, 414 (1946).

(36) Gli errori su η_V derivano dall'imprecisione di ν secondo la (29). η'_{δ_V} invece si riferisce all'eccesso positivo calcolato assumendo un livello di generazione costante (100 g/cm²); in questo caso gli errori derivano dalla imprecisione dell'effetto sperimentale δ_{sp} . Il valore al l.d.m. in parentesi è stato calcolato mediante lo spettro sperimentale di Wilson.

somma algebricamente il contributo ψ dovuto all'effetto del campo magnetico terrestre. Più precisamente si ha:

$$\eta_0 = \eta_V + \psi; \quad \eta_E = \eta_V - \psi,$$

da cui si trova immediatamente:

$$\eta_V = \frac{1}{2} (\eta_0 + \eta_E) = 0,23 \pm 0,02,$$

in accordo con gli altri valori di η_V calcolati.

6-2. — Nelle tabb. V e VI abbiamo riportato i valori di alcune grandezze calcolate nell'ipotesi di un livello di generazione costante. Chiariamo ora brevemente come tali valori siano stati calcolati.

Si è assunto:

- a) un livello di generazione $x \cos \theta_z = 100 \text{ g/cm}^2$;
- b) un valore η' dell'eccesso positivo indipendente dalla energia;
- c) uno spettro differenziale mesonico del tipo $w^{-\lambda} \cdot dw$.

In tali ipotesi lo spettro differenziale dei mesoni dei due segni è dato da

$$[n_{\pm}(x_0, E_0) dE_0]_{\frac{z}{0}} = \left[\left(1 \pm \frac{1}{2} \eta' \right) p(w, \theta) w^{-\lambda} dw \right]_{\frac{z}{0}},$$

con il solito significato dei simboli. La probabilità $[p(w, \theta)]_{\frac{z}{0}}$, come si vede dalla (12) assume in questo caso l'espressione

$$[p(w, \theta)]_{\frac{z}{0}} = \left[\left(\frac{100 E_0}{wx_0 \cos \theta_0} \right)^{b/W} \right]_{\frac{z}{0}}.$$

Il numero di mesoni registrato dall'apparecchio nelle varie situazioni si calcola ancora mediante le formule (26) ponendovi:

$$\varphi_a(W_{\frac{z}{0}}) \equiv \varphi_b(W_{\frac{z}{0}}) = \left[\left(\frac{100 E_0}{wx_0 \cos \theta_0} \right)^{b/W} \cdot w^{-r} \right]_{\frac{z}{0}}$$

e di conseguenza:

$$[C_a(z_0, \theta)]_{\frac{z}{0}} \equiv [C_b(z_0, \theta)]_{\frac{z}{0}} = \left[\int_{w^*}^{\infty} \left(\frac{100 E_0}{wx_0 \cos \theta_0} \right)^{b/W} I_a(w) w^{-r} dw \right]_{\frac{z}{0}}$$

ed analogamente per le $[D_c(z_0, \theta)]_{\frac{z}{0}}$.

Si possono ora confrontare i valori così calcolati con quelli ricavati dalle nostre misure, e dedurne il valore di η' in maniera del tutto simile a quella seguita per ricavare il valore di v nel n. 5-3. Nella tab. VI sono riportati i

valori η'_{δ_V} calcolati mediante la 1^a delle (28). La 2^a delle (28) fornisce invece per η'_λ a 3500 m:

$$\eta'_\lambda = 0,23 \pm 0,02.$$

I valori riferiti nell'ultima riga della tab. V, sono ottenuti sostituendo nelle (26) in luogo del valore ricavato per ν , il valore di η'_λ fornito dal presente procedimento.

Come si osserva dal confronto dei dati ottenuti con i due diversi procedimenti, questi forniscono per le diverse grandezze calcolate dei valori non molto dissimili. Ciò può essere considerato come conseguenza del fatto che in entrambi i casi si è assunto uno spettro mesonico della stessa forma, e che il livello di 100 g/cm² può considerarsi con buona approssimazione come il livello medio di generazione.

Una indicazione della corenza tra i procedimenti teorici svolti ed i risultati sperimentali è fornita dal valore:

$$\eta'_{\delta_V} = 0,21 \pm 0,05, \quad \text{a } 5100 \text{ m s.l.m.},$$

che si ottiene dai nostri dati sperimentali a quella quota e dallo spettro di HALL⁽³⁷⁾ estrapolato alla quota di 5100 m tenendo conto dell'assorbimento e del decadimento dei mesoni⁽³⁸⁾.

6-3. — Cercheremo ora di valutare l'ordine di grandezza del rapporto k tra l'energia del nucleone incidente e quella del mesone π da esso generato, nell'ipotesi che tale rapporto sia indipendente dall'energia. A questo scopo, ricavando k dalla (18), si ha:

$$k = 0,8 \{ 4\mu / [P_0(u_2 + 2u_7)] \}^{-1/\gamma}.$$

Ponendo, conformemente ai risultati del n. 5-3 $u_2 = 1/2$ ed $u_7 = 1/3$, e quindi per $\gamma = 2,8$ si ha:

$$k = 0,515(\mu/P_0)^{-0,357}.$$

Il valore della costante moltiplicativa $\Lambda\mu$, che compare nelle (26) può essere ricavato confrontando i valori della intensità forniti dalla teoria con i corrispondenti valori sperimentali misurati nelle varie situazioni (13). Se ne ricavano 10 determinazioni indipendenti per il prodotto $\Lambda\mu$, il cui valor medio è:

$$\Lambda\mu = 0,213 \pm 0,013.$$

(37) L. HALL: *Phys. Rev.*, **66**, 321 (1944).

(38) Dati preliminari da noi riferiti in (3) avevano fornito per η'_{δ_V} con lo stesso procedimento $0,32 \pm 0,13$.

Poichè, dalla (1) del n. 2-6 si ricava che $\Lambda \cong 3 \text{ cm}^2 \cdot \text{sterad}$, si ha:

$$\mu = 0,071 \pm 0,004.$$

D'altra parte le misure di VAN ALLEN (39) forniscono per l'intensità assoluta della radiazione primaria al limite dell'atmosfera (alla latitudine di 41° Nord) il valore:

$$\int_{E^*}^{\infty} P(E, 0) dE = 4,6 \pm 0,3 \text{ cm}^{-2} \text{ sterad}^{-1} \text{ min}^{-1}.$$

Assunto ora che E^* corrispondente al taglio del campo magnetico terrestre sia uguale a 2,5 GeV alla nostra latitudine, se ne trae per P_0 , tenuto conto della (16), il valore:

$$P_0 = 43 \pm 3,$$

da cui infine:

$$k = 5,1 \pm 0,2.$$

La frazione di energia ceduta dal nucleone incidente al mesone generato risulta quindi circa del 20 % in ottimo accordo con il valore calcolato (17), (18).

7. - Conclusioni.

7-1. - Con il procedimento che abbiamo descritto nel n. 6-1, si è calcolato a partire dai nostri dati sperimentali il valore relativo delle diverse probabilità dei processi di produzione dei mesoni da parte dei nucleoni incidenti, secondo lo schema (13). Ne è risultato un valore numerico che *indica come egualmente probabili, in ogni tipo di urto tra nucleoni, i processi di produzione di mesoni dei due segni e dei neutretti.*

Assunto un tale schema di generazione, ed assunto per i nucleoni primari (protoni) uno spettro differenziale di potenze con esponente 2,8, si sono calcolati gli spettri mesonici differenziali dei due segni a ciascuna delle quote delle nostre misure, e da questi si sono ricavati i valori «asintotici» dell'eccesso positivo integrale η (indichiamo come «asintotici» tali valori perchè sono quelli che verrebbero misurati con un dispositivo sperimentale capace di discriminare sino alle energie più elevate i mesoni dei due segni). *Da questo procedimento ne sono risultati per η valori (tab. VI) che non variano sensibilmente tra il livello del mare e 7300 m.*

Tali valori teorici di η andrebbero confrontati con i corrispondenti valori

(39) J. A. VAN ALLEN: *Echo Lake Cosmic Ray Symposium* (23-28 giugno 1949): Paper n. 53a, pag. 195.

sperimentali. Prima di procedere a tale confronto occorre però fare due osservazioni:

a) I dispositivi sperimentali usati per misurare l'eccesso positivo *integrale*, forniscono in realtà solo il valore di tale grandezza relativamente ad un intervallo di energie limitato inferiormente dal taglio dell'apparecchio, e superiormente dall'efficienza del sistema usato per la focalizzazione delle particelle dei due segni. Pertanto se, conformemente alla teoria della produzione plurima, si pensa che l'eccesso positivo differenziale debba essere una funzione lentamente crescente dell'energia, i valori «asintotici» di η forniti dalla teoria dovranno risultare sempre superiori ai corrispondenti valori sperimentali.

b) Per ricavare dai dati delle misure eseguite con il nostro apparecchio il valore di η , occorre conoscere lo spettro mesonico differenziale alle varie quote di osservazione. Ora questo è sufficientemente noto solo al livello del mare, ed in parte a 4300 m⁽³⁷⁾; pertanto a quote diverse da queste non è possibile ricavare valori di η che siano *puramente* sperimentali. Per questa ultima ragione l'unico confronto direttamente possibile è tra il valore sperimentale di η al livello del mare indicato concordemente dai diversi autori intorno al 15 % (e tale è anche il valore da noi ottenuto), ed il valore asintotico fornito dalla teoria, pari al 23 %. Come si osserva, la diversità tra questi due valori è nel senso giustificato da a).

Estrapolando, come si è detto ne. n. 6-2, sino a 5100 m lo spettro mesonico differenziale relativo alla quota di 4300 m, si è calcolato un valore sperimentale di η dai dati forniti delle nostre misure, e si è trovato che esso coincide, entro gli errori, con il valore teorico.

Prendiamo ora in considerazione le poche misure differenziali dell'eccesso positivo⁽¹⁻¹⁰⁾ sino ad ora note. Per energie al di sotto di 1 GeV i dati sperimentali al l.d.m. forniti dai diversi Autori (non tutti in accordo tra loro), indicano un valore compreso tra il 12 ed il 20 %. Per energie al di sopra di 1 GeV i dati forniti da OWEN e WILSON⁽⁸⁾, indicano valori decrescenti con l'energia, che per altro sono contradetti sia dalle misure di BRODE⁽⁵⁾ che dalle più recenti misure di BASSI, CLEMENTEL, FILOSOF e PUPPI⁽¹⁰⁾, e di CARO, PARRY e RATHGEBER⁽⁹⁾. Dall'insieme di tutte queste misure differenziali, benchè sia forse prematuro trarre alcuna conclusione, si può tuttavia ritenere che, nei limiti delle energie considerate, l'eccesso positivo non sia una funzione decrescente dell'energia.

Rimangono ora da considerare i valori dell'eccesso positivo misurati tra 9000 e 10000 m da CONVERSI⁽⁶⁾ e da ADAMS, ANDERSON, LLOYD, RAU e SAXENA⁽¹²⁾. Questi Autori trovano valori dell'eccesso positivo notevolmente superiori a quelli da noi calcolati sino a 7300 m. Non abbiamo ritenuto opportuno calcolare il valore teorico di η a quote superiori dato che, con l'aumentare della quota, peggiorano alcune delle approssimazioni che abbiamo dovuto introdurre nella esecuzione numerica dei calcoli. Tuttavia qualitativamente si

può pensare che l'andamento dell'eccesso positivo con la quota sia determinato dai due seguenti fatti contrastanti:

a) al crescere della quota di osservazione lo spettro dei mesoni incidenti sull'apparecchio si arricchisce verso le basse energie; di conseguenza l'eccesso positivo dovrebbe decrescere;

b) l'intensità della componente protonica, responsabile dell'eccesso positivo, cresce con la quota e porta ad un aumento di η .

Si può ritenere quindi che il contrasto tra i nostri dati e quelli degli Autori citati, sia almeno qualitativamente, giustificabile con le precedenti assunzioni. Inoltre è probabile che una certa percentuale delle particelle positive registrate da ADAMS *et al.* sia costituita da protoni.

7-2. – I risultati sperimentali da noi ottenuti a 3500 m con angolo zenitale 60° rispettivamente ad Est e ad Ovest forniscono per l'« effetto di carica » δ i valori (cfr. n. 2-8):

$$\begin{aligned}\delta_E &= -0,07 + 0,01 \text{ (ad Est)} \\ \delta_O &= +0,22 + 0,01 \text{ (ad Ovest)}\end{aligned}$$

Tali risultati, come è stato osservato in una precedente nota (13), potrebbero far pensare all'esistenza di particelle negative nella radiazione cosmica primaria; se invece si tien conto della deflessione, dovuta al campo magnetico terrestre, delle traiettorie mesoniche, si ha (cfr. n. 5-4) *una completa giustificazione dell'effetto negativo registrato nelle misure ad Est, senza ricorrere ad ipotesi relative alla presenza di particelle negative nella radiazione primaria.*

La eventuale esistenza di primari negativi potrebbe quindi essere messa in luce, con dispositivi analoghi al nostro, soltanto con misure dell'effetto δ relative a mesoni di energia così elevata da potersi trascurare l'azione del campo magnetico terrestre.

7-3. – Nel n. 6-1 si è visto che, pur di tener conto della disimmetria delle traiettorie percorse dai mesoni dei due segni, l'eccesso positivo *dedotto dalle misure a 60° di inclinazione zenitale, ha praticamente lo stesso valore che in direzione verticale*, (in accordo con le misure di GROETZINGER e McClure). Questi Autori (che d'ora in poi indicheremo con G. McC.), con misure relative ad una banda di energie attorno a 0,8 GeV, con inclinazioni zenitali di 24° e 58° ad Est e ad Ovest, hanno infatti trovato per l'eccesso positivo (40) i se-

(40) G. McC. definiscono come eccesso positivo la grandezza

$$2(O_+ + E_+ - O_- - E_-) / (O_+ + E_+ + O_- + E_-)$$

e quindi, per ragioni di simmetria, essa non risente dell'effetto di curvatura delle traiettorie mesoniche analogamente alla grandezza λ da noi introdotta nel n. 5-3.

uenti valori:

a 4300 m

$0,18 \pm 0,015$ per 24° , e $0,17 \pm 0,035$ per 58°

ed al 1.d.m.

$0,135 \pm 0,011$ per 24° , e $0,120 \pm 0,036$ per 58° .

Tali valori, indipendenti dall'angolo zenitale di osservazione, sono in buon accordo, anche quantitativamente, con i nostri se si tien presente il carattere differenziale delle misure di G. McC.

Viceversa BALLARIO, BENINI e CALAMAI⁽⁴⁾ con un dispositivo simile al nostro, ma puntato verso Nord, trovano che il valore di δ al 1.d.m. decresce all'aumentare dell'angolo zenitale, e quindi con l'energia media dei mesoni registrati. Tale conclusione è in contrasto sia con le nostre che con le misure di G. McC. Occorre però tener presente che gli Autori giungono a tale conclusione, non considerando l'effetto dovuto alla curvatura delle traiettorie mesoniche nel campo magnetico terrestre. Invero se si tenesse conto anche di questo effetto lo spettro mesonico differenziale risulterebbe più ricco di alte energie rispetto a quello calcolato dai detti AA., soprattutto ai grandi angoli zenithali. Ciò forse può, almeno qualitativamente, giustificare il contrasto tra le loro e le nostre conclusioni. Per chiarire meglio questa questione saranno tra breve iniziate misure con il nostro dispositivo in direzione Nord-Sud.

7-4. — Tenuto conto delle considerazioni svolte nei precedenti numeri crediamo sia possibile concludere che *lo schema fornito dalla teoria della produzione plurima, e che noi abbiamo usato, porta a dei risultati che non sono in contrasto con l'esperienza per quanto riguarda il calcolo dell'eccesso positivo sia in direzione verticale che in direzione inclinata.*

Osserviamo ora che l'energia minima che deve avere un nucleone primario per dar luogo ad un mesone registrabile dal nostro apparecchio nelle misure inclinate a 60° a 3500 m, è di circa 17 GeV, assumendo (vedi n. 6-3) che il 20 % dell'energia del nucleone sia trasferita al mesone π e che quest'ultimo ceda al μ l'80 % della sua energia. *Sembra quindi che si possa ritenere valida la produzione singola sino ad energie dell'ordine di 20 GeV almeno.*

7-5. — Consideriamo infine le asimmetrie Est-Ovest, definite dalle seguenti espressioni:

$$A = 2 \frac{O_+ + O_- - E_+ - E_-}{O_+ + O_- + E_+ + E_-} = \frac{a - 1}{a + 1} ;$$

$$A_{\pm} = 2 \frac{O_{\pm} - E_{\pm}}{O_{\pm} + E_{\pm}} = 2 \frac{a_{\pm} - 1}{a_{\pm} + 1} ;$$

Nella tab. VII sono riportati i valori di queste asimmetrie secondo le nostre misure e secondo i dati ottenuti da G. McC. Si osservi che le nostre misure (Q.R.S.) si riferiscono ad un angolo zenitale di 60° , ad una quota di 3500 m e ad una latitudine di $45^\circ 50'$; quelle di G. McC. invece sono state effettuate a 4300 m, ad una latitudine di 49° e per un angolo zenitale di 58° .

TABELLA VII. — *Asimmetria Est-Ovest.*

	A	A_+	A_-
Q. R. S.	$0,12 \pm 0,02$	$0,27 \pm 0,01$	$-0,03 \pm 0,01$
G. McC.	$0,03 \pm 0,05$	$0,37 \pm 0,05$	$-0,37 \pm 0,06$

Come si vede dalla tab. VII i nostri dati non sono in accordo con quelli di G. McC., in particolar modo per quanto riguarda A_- . I nostri risultati sperimentali indicano che i nucleoni primari aventi energia dell'ordine di grandezza di 20 GeV (cfr. n. 7-4) danno luogo ad un effetto Est-Ovest del 12 %, e quindi il taglio del «cono d'ombra» alla latitudine di $45^\circ 50'$ e angolo zenitale 60° , si estende fino ad energie dell'ordine di grandezza di 20 GeV. Secondo G. McC. invece, A_+ risulta in valore assoluto uguale ad A_- , il che deve essere interpretato nel senso che l'asimmetria Est-Ovest sulla primaria sia: $A = 0$, il che non è contraddetto dal risultati sperimentale di A ottenuto da questi Autori. Osserviamo che calcolando le asimmetrie A_+ ed A_- mediante i dati teorici a_+ ed a_- della tab. V, si trova che esse risultano sensibilmente uguali in valore assoluto (26 %), come è evidente se si pensa nella teoria da noi esposta è stata esplicitamente fatta la ipotesi che sia $A = 0$, cosa che dalle nostre misure non è confermata.

Il disaccordo fra le nostre misure e quelle di G. McC. è però forse giustificabile se si pensa che queste ultime sono differenziali in una ristretta banda di energia attorno a 0,8 GeV.

Dal confronto fra queste due misure, si potrebbe quindi concludere che l'effetto Est-Ovest del 12 % da noi registrato, è relativo ai nucleoni primari responsabili dei mesoni che arrivano alla nostra quota con angolo zenitale 60° ed energia compresa fra 0,5 e 0,8 GeV.

Secondo quanto è stato detto nei nn. 6-3 e 7-4, l'energia di tali nucleoni risulterebbe compresa approssimativamente fra 17 e 21 GeV.

7-6. — Desideriamo qui esprimere la nostra viva gratitudine al prof. G. BERNARDINI per averci suggerito l'argomento della presente ricerca e per il suo prezioso, costante, aiuto durante lo svolgimento di essa.

La nostra gratitudine va pure allo Stato Maggiore dell'«Aeronautica Mili-

tare», ai Piloti ed al personale tecnico del «32º Gruppo» e del «Nucleo Sperimentale» di Guidonia, il cui spirito di collaborazione e sacrificio hanno reso possibile i voli in alta quota per l'esecuzione delle nostre misure.

SUMMARY

The results of our measurements of the positive excess of the hard component of the cosmic radiation at 90; 3500; 5100; 7300 m altitude in the vertical direction, and at 3500 m altitude in the Eastern and Western direction (60º inclination) are here summarized. We attempt to interpret theoretically our experimental data on the basis of the plural production theory of the mesons, and assuming a protonic primary radiation with a spectrum of the form $E^{-2.8}$. The comparison between experimental and theoretical data seems to indicate that best agreement is obtained with a production scheme of the following form:

$$\begin{aligned} P + P &= \begin{cases} P + P + \pi_0 \\ P + N + \pi_+ \end{cases}, \\ N + N &= \begin{cases} N + N + \pi_0 \\ N + P + \pi_- \end{cases}, \\ N + P &= \begin{cases} P + N + \pi_0 \\ P + P + \pi_- \end{cases}, \\ P + N &= \begin{cases} N + N + \pi_+ \end{cases}, \end{aligned}$$

with an equal probability for the production of different kind of mesons (positive, negative or neutral mesons). Taking into account the deflection suffered by the mesons in the earth's magnetic field, a quantitative interpretation is possible of the negative «charge effect» that is given by our experimental data on the Eastern direction at 3500 m altitude. No indication is found for the necessity of the hypothesis of a negative charged primary radiation. From our experimental data, interpreted with the above outlined theory, and from the data of VAN ALLEN about the absolute intensity of the primary charged radiation, we are able to calculate that about 20% of the energy of the primary incoming nucleons is transferred to the generated π -mesons; this figure is in quite good agreement with the theoretical value given by CALDIROLA and CINI, and WATAGHIN. In our measurement at 3500 m altitude, with zenithal inclination of 60º, the minimum energy that mesons must possess at production in order to trigger the apparatus is about 3 GeV, and the corresponding energy of the incoming nucleons of the order of 20 GeV. According to our interpretation the single production theory seems to be satisfactory at least up to this value of energy. The same set of measurements shows that the East-West Asymmetry of the primary radiation at 45º 50' North latitude, 60º zenithal inclination, is about 12 %, leading to the conclusion that the cut-off of the «main cone» at this angle is of the order of 20 GeV or more. The experimental data also allows to conclude that our integrated positive excess remains almost constant between sea level and 7300 m for the vertical direction, and at 3500 m for directions inclined at 60º to the zenith. These results are in agreement with the hypothesis that the positive excess increases with increasing mean energy.

Considerazioni critiche sulle teorie modellistiche dei cicli di isteresi dei materiali magnetici.

G. MONTALENTI

*Istituto Elettrotecnico Nazionale «G. Ferraris» - Torino
Centro studi «Elettrofisica».*

(ricevuto il 5 luglio 1950)

Riassunto. — L'Autore critica, alla luce dei più recenti risultati teorici e sperimentali sulla struttura dei materiali magnetici, le ipotesi che si ammettono valide in ogni teoria che, considerando i materiali magnetici schematizzabili secondo il modello di Ewing, tende a prevedere la forma dei cicli di isteresi. Osserva che la conoscenza della distribuzione dell'orientazione dei domini nello spazio è essenziale a questi fini. L'aver trascurato questo dato è causa degli insuccessi antichi e recenti di ogni interpretazione teorica della forma dei cicli. Riconosce che per individuare la distribuzione dell'orientazione dei domini nello spazio è necessario dare infiniti valori (uno per ogni direzione) del parametro I_s/I_r (ove I_s = intensità di magnetizzazione di saturazione, I_r = intensità di magnetizzazione residua). Osserva che ogni teoria del ciclo di isteresi che si basa sul modello di Ewing senza supporre legami tra campo coercitivo ed intensità di magnetizzazione giunge ad una relazione del tipo (1) $I/I_s = \varphi(H/H_c)$ (ove H_c è il campo coercitivo relativo ad ogni singolo dominio), relazione senz'altro verificata per i cicli rettangolari per i quali $I_s/I_r = 1$. Esamina sperimentalmente su quindici campioni diversi fino a che valori del rapporto I_s/I_r i cicli di saturazione relativi soddisfano ad una relazione del tipo (1), concludendo che essa è valida soltanto per i cicli che differiscono poco dalla forma rettangolare. Da questa esperienza si conclude che una teoria siffatta anche se valida è priva d'interesse pratico poichè per conoscere la disposizione dell'orientazione dei domini nello spazio e quindi la funzione φ della (1) occorre dare molti valori del parametro I_s/I_r (in astratto uno per ogni direzione) e quindi tanto vale dare senz'altro il ciclo di isteresi. Suggerisce alcune esperienze atte a stabilire se, supposta nota la distribuzione dell'orientazione dei domini nello spazio, ogni ciclo di qualsiasi materiale magnetico è rappresentabile mediante la (1) oppure no.

1. - Per dare una rappresentazione analitica della curva di prima magnetizzazione (luogo dei vertici dei cicli di isteresi simmetrici) e dei cicli di isteresi stessi si sono seguite due vie diverse. L'una, rispondente a scopi essenzialmente pratici, si propone soltanto di trovare una espressione analitica che descriva i fatti osservati. Il problema è stato trattato da diversi Autori ⁽¹⁾, ⁽²⁾ e tutti si sono proposti di dare espressioni analiticamente semplici che descrivano sufficientemente bene i fatti osservati. L'altra, rispondente a scopi prevalentemente scientifici, si propone invece di dare una vera e propria teoria dei cicli di isteresi partendo da un certo numero di ragionevoli ipotesi sulla costituzione intima del materiale magnetico. Nel presente lavoro ci si pone per questa seconda strada. Un primo tentativo di interpretazione dei cicli di isteresi fu fatto da I. KUNZ ⁽³⁾ e G. VALLAURI ⁽⁴⁾. Le ipotesi che questi Autori ammettono sulla costituzione del materiale magnetico sono le seguenti: 1) il materiale è costituito da un gran numero di piccole regioni magnetizzate a saturazione (domini di Weiss); 2) i singoli domini ruotano di 180° quando il campo esterno agente raggiunge un ben determinato valore H_c . Ne segue che i domini che fanno un angolo φ col campo esterno ruoteranno di 180° quando quest'ultimo raggiunge il valore $H = H_c/\cos \varphi$; 3) le direzioni dei domini sono uniformemente distribuite nello spazio.

VALLAURI ⁽⁴⁾ ha dato un'espressione analitica del ciclo ed osserva che i valori dell'area dedotti teoricamente concordano con buona approssimazione (4,6 % circa), con quelli ricavati sperimentalmente su un campione di ferro dolce, purchè si sia lontani dai cicli di Rayleigh e da quelli di saturazione. Si vedrà in seguito, alla luce dei più recenti risultati della teoria dei domini, l'importanza del fatto che il campione di materiale, impiegato per controllare la teoria, fosse di ferro dolce. Molti altri autori ⁽⁵⁾ hanno modificato le ipotesi ricordate nel tentativo di essere più aderenti alla realtà. Recentemente PROCOPIU ⁽⁶⁾ ha ripreso la questione supponendo, come ipotesi essenziale, che il valore del campo coercitivo per i singoli domini non sia eguale per tutti, ma si ripartisca, intorno ad un valore medio H_c , secondo una distribuzione maxwelliana.

Le conclusioni alle quali l'Autore giunge, con queste ipotesi, trascurando i fenomeni reversibili e il modo di distribuzione dell'orientazione dei domini nello spazio, sono limitati al primo tratto della curva di prima magnetizza-

⁽¹⁾ C. MACMILLAN: *G.E.R.*, **39**, 225 (1936) e bibliografia ivi citata.

⁽²⁾ F. IRDI: *Elettrotecnica*, **000**, 482 (1938) e bibliografia ivi citata.

⁽³⁾ I. KUNZ: *Phys. Zeits.*, **13**, 591 (1912).

⁽⁴⁾ G. VALLAURI: *Nuovo Cimento*, **5**, 1 (1913).

⁽⁵⁾ F. BITTER: *Introduction to ferromagnetism* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1937), pp. 181-229, e bibliografia ivi citata.

⁽⁶⁾ M. S. PROCOPIU: *Compt. Rend.*, **228**, 457 (1949).

zione. Si prevedono anomalie della legge di Rayleigh che l'Autore ritiene spieghino i dati sperimentali ottenuti da SIXTUS⁽⁷⁾. Comunque, la mancanza di adeguato controllo sperimentale, i lavori di NÉEL⁽⁸⁾ e dello scrivente⁽⁹⁾, il fatto che il meccanismo della magnetizzazione in campi bassi è sostanzialmente diverso fanno sì che appaia dubbia l'interpretazione data da PROCOPIU alle anomalie della legge di Rayleigh osservate da SIXTUS.

2. - È ovvio che al variare delle ipotesi sulla costituzione del materiale magnetico si giunge a previsioni diverse sulla forma dei cicli. Al fine di evitare di cadere nell'astratto sembra utile discutere, alla luce dei più significativi risultati teorici e sperimentali sulla struttura dei materiali magnetici, l'aderenza di dette ipotesi alla realtà.

Ipotesi I: struttura a domini. Che il materiale sia costituito da domini è verità fuori di dubbio. Anzi le ricerche sull'effetto Barkhausen⁽¹⁰⁾ e sulla struttura dei domini col metodo delle polveri⁽¹¹⁾ hanno permesso di concludere che il volume dei singoli domini è dello stesso ordine di grandezza (10^{-9} cm³) per quasi tutti i materiali magnetici.

Ipotesi II: distribuzione del campo coercitivo. Sulla distribuzione del campo coercitivo relativo ai singoli domini intorno ad un valore medio H_c nulla dice la teoria e poco l'esperienza. Tuttavia dai lavori di PREISACH⁽¹²⁾ sull'intensità dell'effetto Barkhausen si può concludere che per cicli quasi rettangolari la curva dell'intensità dell'effetto Barkhausen in funzione del campo magnetico agente è molto ripida e ristretta; cioè quando il campo magnetico raggiunge un ben determinato valore H_c la maggior parte dei domini ruotano quasi simultaneamente. D'altra parte l'esistenza dei cicli rettangolari è anch'essa una conferma indiretta dell'esistenza di un valore critico del campo esterno, eguale per la quasi totalità dei domini costituenti il dato campione, sufficiente a provocarne simultaneamente la rotazione. In prima approssimazione sembra dunque lecito ammettere che il valore del campo coercitivo relativo ai singoli domini abbia lo stesso valore H_c per tutti i domini di un dato campione di materiale.

Ipotesi III: distribuzione dell'orientazione dei domini. Circa il modo di distribuzione dell'orientamento dei domini nello spazio si può asserire che,

(7) K. SIXTUS: *Zeits. f. Phys.*, **121**, 100 (1943).

(8) L. NÉEL: *Cahiers de Physique*, **12**, 20 (1942).

(9) G. MONTALENTI: *Nuovo Cimento*, **5**, 000 (1948).

(10) R. M. BOZORTH e J. F. DILLINGER: *Phys. Rev.*, **35**, 733 (1930) e bibliografia ivi citata.

(11) R. M. BOZORTH: *Phisica*, **15**, 207 (1949).

(12) F. PREISACH: *Ann. der Phys.*, **3**, 737 (1929).

soltanto in casi particolarissimi, è uniforme. Infatti la teoria dei domini prevede e l'esperienza conferma che una tensione meccanica tende ad orientare i domini in direzione parallela o perpendicolare alla tensione stessa a seconda del segno della magnetostruzione. In un materiale magnetico sono sempre presenti tensioni meccaniche le quali fanno sì che l'orientazione dei domini è addensata in determinate direzioni non prevedibili a priori. Soltanto in casi molto particolari la distribuzione dell'orientazione dei domini è uniforme nello spazio. Come si vedrà meglio in seguito, il rapporto tra intensità di magnetizzazione di saturazione I_s e residua I_r è un indice del modo di distribuzione dell'orientazione dei domini. BOZORTH⁽¹³⁾ in un recente lavoro ha determinato per altri scopi il valore del rapporto, I_r/I_s , per diversi materiali ottenendo valori variabili tra zero ed uno. Questi dati si possono utilizzare per confermare che la distribuzione uniforme dei domini è ben lontana dalla realtà nella gran maggioranza dei casi concreti. Queste considerazioni sembrano sufficienti a giustificare gli insuccessi antichi e recenti delle teorie che si propongono di prevedere a priori la forma del ciclo di isteresi basandosi sul modello di Ewing, senza ammettere specifiche ipotesi sulla distribuzione dell'orientazione dei domini nello spazio.

3. – Da quanto esposto segue che è essenziale trovare il modo di conoscere la distribuzione dell'orientazione dei domini nello spazio eseguendo su un dato campione misure magnetiche. Il problema si chiarifica se ci si serve della seguente rappresentazione. Si consideri una sfera di raggio arbitrario e dal suo centro si traccino vettori paralleli ai domini orientati in quella direzione. Se non esistono direzioni preferenziali i punti di incontro vettori superficie della sfera dovrebbero essere uniformemente distribuiti sulla superficie sferica stessa. Se invece esistono direzioni preferenziali detti punti saranno addensati su una determinata porzione della superficie sferica. In fig. 1 a-b sono riportati, in diversi stati di magnetizzazione, due casi tipici: distribuzione uniforme e massima anisotropia. Nel primo caso il rapporto $I_r/I_s = 0,5$ (ove I_s = intensità di magnetizzazione di ogni singolo dominio coincidente in pratica con quella di saturazione; I_r = intensità di magnetizzazione residua). Infatti indicando con θ l'angolo tra il campo esterno H ed il valore locale della intensità

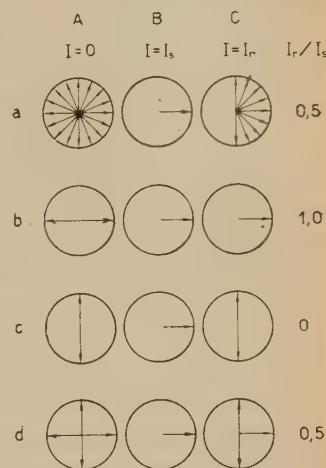


Fig. 1. – Valori del rapporto I_r/I_s per diversi modi di orientazione della direzione dei domini. [BOZORTH: *Physica*, **15**, 207 (1949)].

(13) R. M. BOZORTH: *Zeits. f. Phys.*, **124**, 519 (1948).

di magnetizzazione si ha:

$$\frac{I_r}{I_s} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2}.$$

Nel secondo caso (massima anisotropia) il rapporto I_r/I_s è ovviamente eguale all'unità.

Si osservi che anche la distribuzione dei domini schematizzata in fig. 1 dà un rapporto $I_r/I_s = 1/2$. Basta questo semplice esempio per convincersi che per individuare una determinata distribuzione di domini è necessario ricavare il valore del rapporto I_r/I_s in ogni direzione, cioè è necessario dare un numero infinito di valori del parametro I_r/I_s . Concludendo: per conoscere il modo di distribuzione dell'orientazione dei domini di un dato campione di materiale magnetico è necessario conoscere infiniti valori, uno per ogni direzione, del parametro I_r/I_s . Dal punto di vista pratico si può sin d'ora osservare che se per prevedere la forma del ciclo è necessario conoscere come sono distribuiti i domini nello spazio, e quindi un gran numero di valori del parametro I_r/I_s , il risultato è privo di interesse poichè tanto vale ricavare direttamente il ciclo.

Si può inoltre osservare che ogni teoria la quale si basi, per prevedere la forma del ciclo, su ipotesi del tipo di quelle citate al n. 2 deve necessariamente giungere per i cicli di saturazione ad una equazione del tipo:

$$(1) \quad \frac{I}{I_s} = \varphi \left(\frac{H}{H_c} \right).$$

Infatti i valori di I_s e di H_c si postulano come dati del materiale e si ammette (come è ragionevole alla luce delle teorie del campo coercitivo) che non esista fra queste due grandezze alcun legame. A seconda del modo con il quale si particolarizzano le ipotesi del n. 2 e al variare della direzione del campo esterno si ottiene una diversa funzione φ , ma la (1), come tipo di relazione, deve sempre rimanere valida.

Cicli di isteresi rettangolari sono trasformabili per affinità e quindi rappresentabili senz'altro con una equazione del tipo (1). Noto il valore di $I_s = I_r$ e di H_c è possibile, come è ovvio, tracciare a priori ogni ciclo rettangolare. Si noti che il valore del campo coercitivo relativo ad un ciclo di saturazione coincide, poichè i dominii sono paralleli al campo esterno (disposti cioè come in fig. 1 b), con il campo coercitivo H_c relativo ad ogni singolo dominio. Le esperienze eseguite hanno lo scopo di esaminare fino a che valori del rapporto I_s/I_r si può estendere questa proprietà, cioè se tutti i cicli aventi lo stesso valore di I_s/I_r , misurato nella direzione del campo esterno, sono rappresentabili mediante un'equazione del tipo (1) indipendentemente dal tipo di materiale che si considera. Il ciclo di fig. 2 si riferisce ad « Alnico » direzionale. Il rap-

porto I_s/I_r vale 1,1. Per ricavare l'equazione del tipo (1) che lo rappresenta è sufficiente valutare il rapporto I/I_s in corrispondenza ad un opportuno numero di valori del rapporto H/H_c (cioè il valore del rapporto I/I_s per un dato numero di valori del campo H misurato assumendo il campo coercitivo H_c di saturazione e relativo al dato campione come unità di misura) per le diverse parti del ciclo. I risultati dedotti dal ciclo di fig. 2 sono riportati in tab. I. Si considerino ora i due cicli riportati in fig. 3 e fig. 4. I valori di I_s/I_r coincidono per ambedue col valore I_s/I_r del ciclo di fig. 2, mentre i campi coercitivi sono notevolmente diversi. Noti allora i rispettivi valori di I_s , I_r ed H_c , si costruiscono a priori i cicli mediante la tab. I. Come

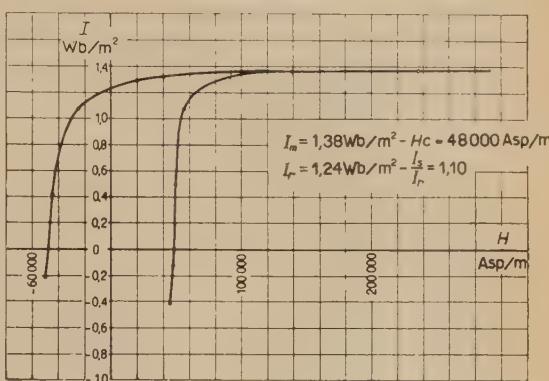


Fig. 2. - Ciclo ricavato con metodo balistico su un campione di Alnico direzionale,

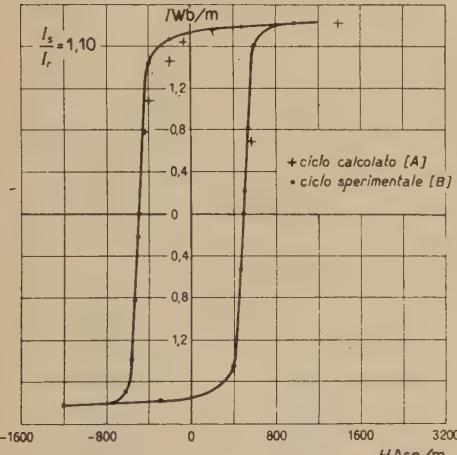


Fig. 3. - [B] Ciclo relativo ad un campione di ferro puro. (F. PREISACH: *Ann. der Phys.*, **3**, 737 (1929)). [A] Ciclo ricavato mediante tabella I.

quelli aventi il valore di $I_s/I_r = 1,1$) si può concludere che soltanto in un caso, da ritenersi casuale, essi sono trasformabili l'un nell'altro per affinità o, se si vuole, non è possibile descrivere il ciclo con un'equazione di tipo (1) valida per ogni dato valore di I_s/I_r indipendentemente dal tipo di ma-

si vede dalle figg. 3 e 4 i cicli costruiti mediante la tab. I e quelli ricavati sperimentalmente sono in buon accordo. In altre parole i cicli di figg. 2 e 3 e di fig. 4 sono trasformabili per affinità. Si sono inoltre esaminati molti altri cicli di materiali diversi indicati in tab. II. I cicli che si riferiscono al Permalloy 45 sono stati ricavati da un medesimo campione sottoposto a diversi valori di tensione meccanica. Poichè la magnetostrizione in questo materiale è positiva, l'effetto della tensione meccanica è quello di far tendere all'unità il rapporto I_s/I_r , quando il campo magnetico agente ha la stessa direzione della tensione meccanica. Paragonati tra loro cicli aventi lo stesso valore I_s/I_r (ad eccezione di

TABELLA I.

Ramo superiore del ciclo H positivi		Ramo superiore del ciclo H negativi		Ramo inferiore del ciclo H positivi	
H/H_c	I/I_s	H/H_c	I/I_s	H/H_c	I/I_s
0	0,906	0	0,906	1,00	0,000
0,1	0,914	0,1	0,884	1,02	0,145
0,2	0,928	0,2	0,870	1,04	0,364
0,3	0,936	0,3	0,850	1,08	0,624
0,4	0,944	0,4	0,826	1,10	0,702
0,5	0,950	0,5	0,798	1,12	0,740
0,6	0,958	0,6	0,762	1,14	0,782
0,7	0,964	0,7	0,710	1,21	0,848
0,8	0,968	0,8	0,630	1,25	0,870
0,9	0,972	0,9	0,435	1,46	0,920
1,0	0,980	1,0	0,000	1,58	0,944
1,2	0,980	—	—	1,87	0,964
1,4	0,986	—	—	2,07	0,980
1,6	0,986	—	—	—	—
2,0	0,994	—	—	—	—

TABELLA II.

MATERIALE	$\frac{I_S}{I_R}$	Campo coercitivo H_c Asp/m
Alnico	1,6	46 000
Acciaio 30 % Cobalto	1,6	33 500
Alnico	1,72	63 000
Alnico	1,55	43 000
Acciaio - cromo - tungsteno	1,73	5 000
Acciaio 30 % Cobalto	1,65	15 500
Acciaio - cromo - tungsteno	1,78	5 300
Acciaio al cromo manganese	1,67	6 000
Alnico direzionale	1,11	48 000
Mumetal	2,07	18
Ferro puro	1,11	410
Ossido di ferro e cobalto	1,11	48 000
Permalloy 45	2,06	380
Permalloy 45	1,68	290
Permalloy 45	1,89	315

teriale. Le verifiche si sono estese ad altri cicli ricavati direttamente dalla letteratura.

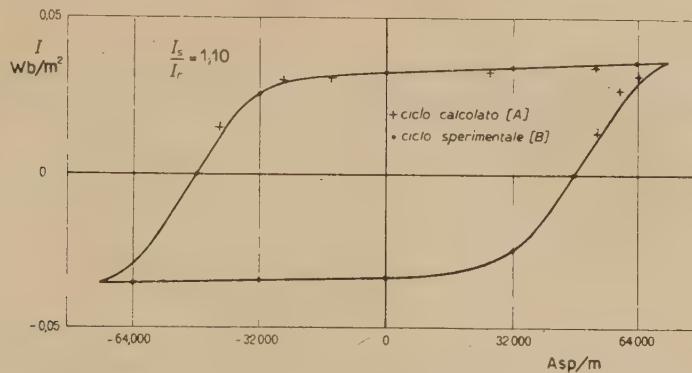


Fig. 4. – [B] Ciclo relativo ad un campione di materiale costituito da polvere compressa di ossido di ferro e di ossido di cobalto. (W. C. ELLIS e E. E. SCHUMACHER: *Bell. Syst. tech. Journ.*, **14** (1935)). [A] Ciclo ricavato mediante tabella I.

4. – I risultati delle esperienze eseguite consentono di giungere ad alcune conclusioni generali. Non è possibile dare un'equazione del tipo (1) caratteristica per ogni dato valore del parametro I_r/I_s , ma indipendente dal tipo di materiale che si considera. Questo fatto si può interpretare in due modi: o la conoscenza di un solo valore del parametro I_s/I_r non è sufficiente a rappresentare neanche in modesti limiti di approssimazione la distribuzione dell'orientazione dei domini nello spazio di un dato campione, oppure le ipotesi del n. 2 non sono sufficienti a descrivere la realtà dei fatti. Per dirimerà la questione occorrerebbe sperimentare, ad esempio, su materiali diversi aventi però distribuzione dell'orientazione dei domini uniforme ($I_r/I_s = 1/2$ in ogni direzione). Se valesse per i cicli di saturazione la trasformazione affine vorrebbe dire che le ipotesi del n. 2 sono sufficienti a rappresentare i fatti. In caso contrario, per costruire una teoria dei cicli di isteresi, sarebbe invece necessario fare ipotesi ancora più restrittive che tengano conto delle più intime particolarità del tipo di materiale magnetico che si considera.

Lo scrivente non ha potuto eseguire queste esperienze non disponendo dei campioni di materiali necessari.

Comunque le esperienze eseguite consentono di concludere che l'utilità pratica di una teoria modellistica dei cicli di isteresi è in ogni caso assai modesta. Se infatti è necessario dare, per conoscere il modo di distribuzione dell'orientazione dei domini nello spazio, molti valori del parametro I_s/I_r (in astratto uno per ogni direzione) tanto valre dare direttamente il cielo di isteresi.

Allo stato attuale si può asserire che soltanto nel caso in cui il materiale sia sollecitato a valori di campo bassi rispetto al campo coercitivo massimo

e quindi seguendo le leggi di Rayleigh, è possibile definire le sue proprietà con due soli parametri: la permeabilità iniziale e la pendenza della retta che rappresenta la permeabilità in funzione del campo.

Si ringrazia il prof. VALENTINO ZERBINI per gli aiuti ed i consigli elargiti nello svolgimento di questa ricerca.

S U M M A R Y

The Author discusses, through latest theoretical and experimental results regarding magnetic material structure, the hypotheses which act as first step in the theories which, considering magnetic materials from the Ewing's model viewpoint, try to provide hysteresis loop form. He points out that this needs knowledge of space distribution of preferred magnetisation direction in domains and that to have overseen this brought to failure many old and recent theories of hysteresis loop form. In order to have a thorough picture of space distribution of domain orientation it is necessary to give infinite (one for each direction) values of the I_s/I_r parameter, where I_s = saturation intrinsic induction, and I_r = residual induction. Theories founded on Ewing's model and supposing no bond between coercive force and intrinsic induction, come to a relation of this type (1) $I/I_s = \varphi(H/H_c)$ (where H_c is the single domain coercive force); this relation obviously holds for rectangular loop where $I_r/I_s = 1$. Experimental results taken on fifteen samples of different materials were examined to obtain the limit of I_s/I_r value for which loops can be expressed by formula (1); it has been found that it holds only for loops having no more than slight difference from rectangular form. The experience shows then that, even if such a theory would be sound, it is practically useless because, in order to have a full knowledge of space distribution of domain orientation and consequently of function φ , many I_s/I_r values (theoretically one for each direction) are needed and this has no advantage over the complete hysteresis loop drawing. The Author suggests some experiences which could show if, with a given space distribution of domain orientation, the hysteresis loop can or cannot be represented by a relation similar to (1).

On the influence of the spin interaction on the scattering of mesons and electrons by light nuclei.

E. AMALDI, G. FIDECARO and F. MARIANI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 10 Luglio 1950)

Summary. — As an extension of a preceding paper, the electromagnetic collision of a particle of a spin $1/2$ against a light nucleus, represented as a « one particle model », is treated in the first Born approximation. The differential cross sections for coherent as well as for incoherent scattering against Li and C nuclei are calculated for μ -mesons of 200 and 600 MeV and for electrons of 300 MeV; the new results are compared with those obtained, in the preceding paper neglecting the spin of the impinging particle. As a conclusion a short discussion is given of the contribution of the neutrons, present in the nucleus, to the electromagnetic scattering, in which the finite dimensions of the observed nucleons are taken into account.

1. — Introduction.

In a preceding paper (¹), that in the following we will call I, we have considered the coulomb scattering, by a light nucleus, of a particle of such a high energy that the corresponding wave length λ was of the same order of magnitude or shorter than the mean distance of protons inside the nucleus itself. The interest of this problem is due to the existence of particles, such as μ -mesons, whose interaction with nucleons seems to be due practically to the electromagnetic field, also at energies of a few hundred MeV (²).

At still higher energies, the electromagnetic interaction of the impinging particle with the mesonic field of the nucleons, can give rise to a kind of an-

(¹) E. AMALDI, G. FIDECARO and F. MARIANI: *Nuovo Cimento*, **7**, 553 (1950).

(²) E. AMALDI and G. FIDECARO: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 93 (1950); *Nuovo Cimento*, **7**, 535 (1950).

malous electromagnetic-scattering (3), (4) with or without emission of secondary mesons.

The calculation of the cross sections of these two processes need the use of the mesonic field theories. One can note, however, that in the collision without production of secondary mesons, the mesonic field of the nucleon manifests itself as a convenient spacial distribution of the electric charge of the nucleon itself.

Waiting for a complete theory in which also processes with emission of secondary mesons are taken into account, we can try to introduce, in a pure phenomenological way, the radius of the spacial region where the electric charge of the observed nucleon is distributed and deduce the differential cross section of the elastically scattered particles in an elementary way i.e. without introducing the complications and uncertainties due to the mesonic field.

A comparison with results of convenient experiments at a later time could give some interesting information on the value of this phenomenological radius (not necessarily velocity independent).

This problem has been treated in I from this phenomenological point of view, neglecting the spin of the impinging particle and treating the nuclear protons in a classical way.

In the present paper we will discuss the collision of a particle of spin 1/2 against a nucleus represented, as in our previous paper, by a one particle-model, taking into account the spin-spin interaction and the retardation due to the finite velocity of propagation of the electromagnetic field.

This problem is very similar to that of the collision of a fast electron against an atom, which has been treated by MØLLER (5) disregarding the exchange-effect between the impinging electron and the atomic electrons.

For the wave functions of the atomic electrons this Author makes use of the DARWIN approximation (6) according to which the terms of the order of

$$r_m^2 = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2,$$

are neglected.

Such an approximation is better satisfied in our case of the nuclear protons than in the case of the atomic electrons.

As a consequence of such an approximation the Pauli additional term that can be introduced in the Lagrange function (7) in order to take into account

(3) J. EVANS and E. P. GEORGE: *Nature*, **164**, 20 (1949); *Proc. Roy. Soc.*, A in press; E. P. GEORGE and P. T. TRENT: *Nature*, **164**, 838 (1949).

(4) C. FRANZINETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 384 (1950).

(5) C. MØLLER: *Ann. d. Phys.*, **14**, 531 (1932).

(6) C. G. DARWIN: *Proc. Roy. Soc.*, **118**, 654 (1928).

(7) W. PAULI: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 203 (1941).

the anomalous magnetic moment of the protons ($\mu_p = \gamma(e\hbar/M_p c) = \gamma er_m$; $\gamma = 2,73$) can be neglected. In fact the corresponding term appearing in the current equation (the so called polarization current) gives rise, in the expression of the cross section, only to terms of the order of $(\gamma - 1)^2 r_m^2$, as one can see from a direct calculation as well from results of CORBEN and SCHWINGER (8) on the collision between two free particles.

A second consequence of the use of the first approximation in r_m , that we like to point out, is that it allows to specify the shape of the potential well, representing our light nucleus, as a parabolic well (of infinite depth) (9).

The calculations of the cross sections can be performed in an elementary way according to the above sketched lines (section 2); the new results (equations (34) and (35)) do not differ very much from those obtained in I, as it is shown in section 3, where we give a few numerical examples for mesons of 200 and 600 MeV, scattered by light nuclei.

Considering that the neutron-electron interaction is very small (10), we have applied our equations (34) and (35) also to the case of the scattering of electrons of 300 MeV by light nuclei. In this case however we have to consider also the influence of the radiation on the scattering and the electron-electron collisions; these two effects however are not so important as to mask the scattering of the electrons by the nucleus (section 4).

Finally in section 5 we will consider a question mentioned in I in connection with the problem of the electromagnetic radius of the proton, i.e. the contribution to the electromagnetic scattering of the impinging particles, due to the neutrons present in the nucleus. As we will see such a contribution cancels in part the effect of the finite dimensions of the nucleons, at least in the case of a weak coupling between nucleons and mesonic field.

2. - Calculation of the cross section.

The problem of the collision of a particle of spin 1/2 against a nucleus will be treated, as in I, in the first Born approximation and in the laboratory frame of reference, where the center of gravity of the nucleus is at rest before the collision.

Considering that in this approximation, in a collision between the impinging particle and a nucleus only one proton can be excited, we can substitute, from the beginning, to the nucleus a single proton moving in a potential well;

(8) H. C. CORBEN and J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **58**, 953 (1940).

(9) K. NIKOLSKY: *Zeits. f. Phys.*, **62**, 677 (1930).

(10) E. FERMI and L. MARSHALL: *Phys. Rev.*, **72**, 1139 (1947); W. W. HAVENS, I. I. RABI and L. J. RAINWATER: *Phys. Rev.*, **72**, 634 (1947).

the contributions due to different protons will be summed together at a later time.

According to the method first used by MÖLLER (5), we will calculate the scalar potential Φ^e and the vector potential \mathbf{A} at the position \mathbf{R} occupied by the nuclear proton, due to the transition of the impinging particle from its initial state, of wave vector $\mathbf{K}_0 = \mathbf{p}_0/\hbar$ and spin s_0 , to its final state, of wave vector $\mathbf{K} = \mathbf{p}/\hbar$ and spin s .

If the wave functions of the impinging and scattered particle are given by

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{K_0} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} u_0(s) \exp [i(\mathbf{K}_0 \times \mathbf{r} - W_0 t)], \\ \Psi_K = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} u(s) \exp [i(\mathbf{K} \times \mathbf{r} - W t)], \end{array} \right.$$

where $E = Wh$ is the total energy of the particle, Ω the volume of the cavity containing our system and the $u(s)$ the usual Dirac amplitudes of the relativistic plane wave, we have

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi^e(\mathbf{R}) = -\frac{e}{\Omega} \int (u_0^*(s), u(s)) \exp [i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \times \mathbf{r}] \times \\ \quad \times \frac{\exp [i \frac{W - W_0}{c} |\mathbf{R} - \mathbf{r}|]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dv \cdot \exp [i(W_0 - W)t], \\ \mathbf{A}(\mathbf{R}) = -\frac{e}{\Omega} \int (u_0^*(s), \alpha_1 u(s)) \exp [i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \times \mathbf{r}] \times \\ \quad \times \frac{\exp [i \frac{W - W_0}{c} |\mathbf{R} - \mathbf{r}|]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dv \cdot \exp [i(W_0 - W)t], \end{array} \right.$$

where the factor $\exp [i(W_0 - W)/c] |\mathbf{R} - \mathbf{r}|$ represents the effect of the retardation and α_1 , the usual Dirac vector operating on the spin s of the impinging particle. If we call

$$(3) \quad \mathbf{k} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_0, \quad \omega_\mu = W_0 - W,$$

$$(4) \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Omega} \exp [i(\mathbf{k} \times \mathbf{r})],$$

we have

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi^e(\mathbf{R}) = -e \int (u_0^*(s), u(s)) \Phi(\mathbf{r}) \frac{\exp [-i\omega_\mu \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c}]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dv \cdot \exp [i\omega_\mu t], \\ \mathbf{A}(\mathbf{R}) = -e \int (u_0^*(s), \alpha_1 u(s)) \Phi(\mathbf{r}) \frac{\exp [-i\omega_\mu \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c}]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dv \cdot \exp [i\omega_\mu t]. \end{array} \right.$$

According to the Dirac theory, in order to have the interaction energy between the impinging particle and the nuclear proton, we have to calculate the matrix element of the operator

$$e(\Phi^*(\mathbf{R}) + \alpha_2 \times \mathbf{A}(\mathbf{R})),$$

corresponding to the transition of the nuclear proton from its initial state n to its final state m ; α_2 is the Dirac vector operating on the spin S of the proton. If we call

$$\psi_m(\mathbf{R}) = \varphi_m(\mathbf{R}) \exp \left[-i \frac{\varepsilon_m}{\hbar} t \right],$$

the wave function of the proton in the state m of energy ε_m , we have the following expression for the matrix element

$$(6) \quad \begin{aligned} (K_0 s_0 n S_0 | U | K s m S) &= \\ &= e \int \Psi_{K_0}^*(\mathbf{r}) \varphi_n^*(\mathbf{R}) \frac{1 - \alpha_1 \times \alpha_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} \Psi_K(\mathbf{r}) \varphi_m(\mathbf{R}) \exp \left[-i \omega_\mu \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c} \right] d\mathbf{v} d\mathbf{V} = \\ &= e^2 \left\{ (u_0^*(s), (u(s)) \int \Phi(\mathbf{r}) (\varphi_n^*(\mathbf{R}), \varphi_m(\mathbf{R})) \frac{\exp \left[-i \omega_\mu \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c} \right]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d\mathbf{v} d\mathbf{V} - \right. \\ &\quad \left. - (u_0^*(s), \alpha_1 u(s)) \times \int \Phi(\mathbf{r}) (\varphi_n^*(\mathbf{R}), \alpha_2 \varphi_m(\mathbf{R})) \frac{\exp \left[-i \omega_\mu \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c} \right]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d\mathbf{v} d\mathbf{V} \right\}. \end{aligned}$$

This expression of the interaction energy can be symmetrized noting that one must obtain the same result by inverting the role of the two particles: the only differences with respect to (6) that one would have in this second case are that $\alpha_1 \times \alpha_2$ and $\exp[-i\omega_\mu |\mathbf{R} - \mathbf{r}|/c]$ will be replaced respectively by $\alpha_2 \times \alpha_1$ and $\exp[-i\omega_\mu |\mathbf{R} - \mathbf{r}|/c]$ with

$$(7) \quad \omega_p = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{\hbar},$$

α_1 and α_2 commute because they operate on two different spin variables; therefore we can substitute the retardation factor appearing in (6) with

$$(8) \quad \frac{\exp \left[-i \omega_\mu \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c} \right] + \exp \left[-i \omega_p \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c} \right]}{2}.$$

According to the theory of perturbation, the collision takes place satisfying the theorem of conservation of energy

$$\hbar \omega_\mu = E_0 - E = \varepsilon_m - \varepsilon_n = -\hbar \omega_p,$$

so that (8) reduces to

$$(9) \quad \cos \omega_\mu \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c}.$$

We conclude that (6) can be put in the form

$$(10) \quad (K_0 s_0 n S_0 | U | K s m S) = e^2 \{ (u_0^*(s), u(s)) h_{nm} - (u_0^*(s), \alpha_1 u(s)) \times \mathbf{S}_{nm} \},$$

where

$$(11) \quad \begin{cases} h_{nm} = \int \Phi(\mathbf{r})(\varphi_n^*(\mathbf{R}), \varphi_m(\mathbf{R})) \frac{\cos \omega_\mu |\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c} dv dV, \\ \mathbf{S}_{nm} = \int \Phi(\mathbf{r})(\varphi_n^*(\mathbf{R}), \alpha_2 \varphi_m(\mathbf{R})) \frac{\cos \omega_\mu |\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c} dv dV. \end{cases}$$

Performing the integration with respect to \mathbf{r} according to MÖLLER method (5) we get

$$(12) \quad \begin{cases} h_{nm} = \frac{4\pi}{k^2 - \left(\frac{\omega_\mu}{c}\right)^2} \rho_{nm}, \\ \mathbf{S}_{nm} = \frac{4\pi}{k^2 - \left(\frac{\omega_\mu}{c}\right)^2} \mathbf{J}_{nm}, \end{cases}$$

where

$$(13) \quad \begin{cases} \rho_{nm} = \int \Phi(\mathbf{R})(\varphi_n^*(\mathbf{R}), \varphi_m(\mathbf{R})) dV, \\ \mathbf{J}_{nm} = \int \Phi(\mathbf{R})(\varphi_n^*(\mathbf{R}), \alpha_2 \varphi_m(\mathbf{R})) dV. \end{cases}$$

Substituting (12) in (10) we have finally

$$(14) \quad (K_0 s_0 n S_0 | U | K s m S) = \frac{4\pi e^2}{k^2 - \left(\frac{\omega_\mu}{c}\right)^2} (u_0^*(s), [\rho_{nm} - \alpha_1 \times \mathbf{J}_{nm}] u(s)).$$

In order to get the differential cross section $d\sigma_{nm}/d\omega$ corresponding to the transition $n \rightarrow m$ of the nuclear proton, the square of the modulus of the matrix element (14) must be summed with respect to all final orientations of the spins of the two particles and averaged with respect to all initial orientations of the spins.

We can perform this operations on the spin s and s_0 of the meson before specifying the wave functions of the nuclear protons. Using the method of

CASIMIR (11) we get

$$(15) \quad \frac{1}{2} SS_0 |(u_0^*(s), [\rho_{nm} - \alpha_1 \times \mathbf{J}_{nm}] u(s))|^2 = \frac{(4\pi e^2)^2}{\left[k^2 - \left(\frac{\omega_\mu}{c} \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{1}{2E_0 E} \times$$

$$\times \{ |\rho_{nm}|^2 [c^2 \mathbf{p} \times \mathbf{p}_0 + \mu^2 c^4 + EE_0] - 2\mathcal{R}(\rho_{nm}^* [c \mathbf{J}_{nm} \times \mathbf{p} E_0 + c \mathbf{J}_{nm} \times \mathbf{p}_0 E]) +$$

$$+ 2c^2 \mathbf{J}_{nm} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{J}_{nm}^* \times \mathbf{p}_0 - \mathbf{J}_{nm}^* \times \mathbf{J}_{nm} [c^2 \mathbf{p} \times \mathbf{p}_0 + \mu^2 c^4 - E_0 E] \}.$$

Here S and S_0 mean summations over the spin directions for the initial and for the final state; $\mathcal{R}(A)$ means the real part of A .

We must now apply to (15) the summation $(1/2)SS_0$ over the spin of the proton: multiplying the expression so obtained by

$$\frac{2\pi}{\hbar} \rho(E) \Omega \frac{E_0}{c^2 p_0} = \frac{2\pi}{\hbar} \Omega^2 \frac{EE_0}{(2\pi\hbar)^3 c^4 p_0},$$

we get finally the differential cross section

$$(16) \quad \frac{d\sigma_{nm}}{d\omega} = \frac{4e^4}{c^4} \frac{p}{p_0} \frac{\Omega^2}{\left[|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2 - \left(\frac{E_0 - E}{c} \right)^2 \right]^2} \times$$

$$\times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} SS_0 \{ |\rho_{nm}|^2 [c^2 \mathbf{p} \times \mathbf{p}_0 + \mu^2 c^4 + EE_0] - \mathcal{R}(2c\rho_{nm}^* [\mathbf{J}_{nm} \times \mathbf{p} E_0 + \mathbf{J}_{nm} \times \mathbf{p}_0 E]) +$$

$$+ 2\mathbf{J}_{nm} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{J}_{nm}^* \times \mathbf{p}_0 - |\mathbf{J}_{nm}|^2 [c^2 \mathbf{p} \times \mathbf{p}_0 + \mu^2 c^4 - E_0 E] \}.$$

In order to carry on the calculations we need now to specify the wave function of the protons in equation (13). Considering that the energy of protons in the nucleus is always small with respect to their rest energy, we can use the Darwin approximation (6) i.e. we can put

$$(17) \quad \varphi_m = a_s \varphi_m,$$

where a_s operates on the spacial coordinates and φ_m is the normalized solution of the Schrödinger equation of the proton; according to the two possible orientations of the spin, a_s assumes the two following forms

$$(18) \quad a_s = \begin{vmatrix} \frac{r_m}{2} \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ -\frac{r_m}{2} i \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad a_s = \begin{vmatrix} \frac{r_m}{2} i \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{r_m}{2} \left(i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$(19) \quad r_m = \frac{\hbar}{M_p c}.$$

(11) See for instance: W. HEITLER: *The quantum theory of radiation*, pag. 157.

The orthogonality and normalization conditions are satisfied by the wave function (17) only if we neglect the terms in r_m^2 . In accordance with such an approximation and noting that \mathbf{J}_{nm} is proportional to r_m , we will neglect the terms containing $|\mathbf{J}_{nm}|^2$ so that equation (16) reduces to

$$(20) \quad \frac{d\sigma_{nm}}{d\omega} = \frac{4e^4}{c^4} \frac{p}{p_0} \frac{\Omega^2}{\left[|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2 - \left(\frac{E_0 - E}{c} \right)^2 \right]^2} \times \\ \times \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} SS_0 \{ |\varphi_{nm}|^2 [c^2 \mathbf{p} \times \mathbf{p}_0 + \mu^2 c^4 + E_0 E] - \\ - 2c\mathcal{R}(\varphi_{nm}^* [\mathbf{J}_{nm} \times \mathbf{p}_0 E_0 + \mathbf{J}_{nm} \times \mathbf{p}_0 E]) \} .$$

For numerical calculations we need now to choose some special type of one particle model for the nuclear proton. We will use, as in I, the parabolic-well model which gives reasonable results for light nuclei.

Under this assumption the wave function of the state m will split in the product of the wave functions of three harmonic oscillators each one of the form

$$(21) \quad \begin{cases} \varphi_{m_1}(\xi) = [\pi^{1/2} a 2^{m_1} m_1!]^{-1/2} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2} \right] H_{m_1}(\xi), \\ \xi = \frac{x}{a}, \quad a = \left(\frac{\hbar^2}{M_p w} \right)^{1/2}, \end{cases}$$

where $H_{m_1}(\xi)$ is a Hermite's polynomial and $w = \hbar\nu$ the energy interval between two successive quantum states of the bound proton.

Introducing (21) in (17) one can easily recognize that if the proton spin does not change orientation, φ_{nm} contains terms of zero and second order in r_m , while if the proton spin changes its orientation, φ_{nm} contains only terms of the second order in r_m . Therefore, with our approximation, we get for the first term appearing in (20)

$$(22) \quad \frac{1}{2} SS_0 |\varphi_{nm}|^2 = \frac{1}{\Omega^2} |I_{n_1 m_1}|^2 \delta_{n_2 m_2} \delta_{n_3 m_3},$$

where

$$(23) \quad I_{n_1 m_1} = a \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n_1}(\xi) \varphi_{m_1}(\xi) \exp [iQ\xi] d\xi = (-1)^{(m_1 - n_1)/2} \Phi_{m_1}^{(m_1 - n_1)}(x),$$

$$(24) \quad Q = ka, \quad x = \frac{Q^2}{2},$$

have been defined by means of equations (32), (35) and (36) of I; we note that $\Phi_{m_1}^{(m_1 - n_1)}$ is a real quantity.

Before calculating the second term appearing in (20), we note that \mathbf{J}_{nm} contains only terms of the first and second order in r_m . Considering that \mathbf{J}_{nm} is multiplied by φ_{nm}^* , we conclude that we have to consider only transitions

without any change of the spin orientation. The calculation of the component of \mathbf{J}_{nm} is elementary. Taking, for simplicity's, sake the x axis parallel to \mathbf{k} , we get, for instance, the following expression for the x component of \mathbf{J}_{nm} corresponding to no change of the spin orientation

$$(25) \quad \mathbf{J}_{nmx} = \frac{r_m}{2} \left\{ \mathbf{i} \cdot 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n_1} \frac{d\varphi_{m_1}}{d\xi} \Phi d\xi - k I_{n_1 m_1} \right\}.$$

Using the well known properties of the Hermite's functions one gets

$$(26) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \varphi_{n_1} \frac{d\varphi_{m_1}}{d\xi} d\xi = \frac{m_1}{a} I_{n_1 m_1} - \frac{1}{2a} I_{n_1 m_1 + 1}.$$

Using (23), (25) and (26) one gets

$$(27) \quad -\frac{1}{2} S S_0 \cdot 2c \mathcal{R}(\varphi_{nm}^* [\mathbf{J}_{nm} \times \mathbf{p} E_0 + \mathbf{J}_{nm} \times \mathbf{p}_0 E]) = \frac{1}{\Omega^2} r_m [p_x E_0 + p_{0x} E] \times \left\{ k |I_{n_1 m_1}|^2 - \frac{2}{a} |I_{n_1 m_1}| \left[m_1 |I_{n_1 m_1 - 1}| + \frac{1}{2} |I_{n_1 m_1 + 1}| \right] \right\},$$

and finally introducing (22) and (27) in (20) we have

$$(28) \quad \frac{d\sigma_{nm}}{d\omega} = \frac{4e^4 p}{c^4 p_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2 - \left(\frac{E_0 - E}{c} \right)^2} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{1}{2} |I_{n_1 m_1}|^2 [c^2 \mathbf{p} \times \mathbf{p}_0 + \mu^2 c^4 + E_0 E] + \right. \right. \\ \left. \left. + r_m [p_x E_0 + p_{0x} E] \left(\frac{1}{2} |I_{n_1 m_1}|^2 k - \frac{1}{a} |I_{n_1 m_1}| \left[m_1 |I_{n_1 m_1 - 1}| + \frac{1}{2} |I_{n_1 m_1 + 1}| \right] \right) \right\} \right].$$

If we call, as in I,

$$(29) \quad y = \frac{E_0 - E}{E_0},$$

and apply to our collision problem the theorem of conservation of energy, we get

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = p_0 \varphi(y), \\ \Delta p^2 = p_0^2 \{ 1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta \}, \end{array} \right.$$

where

$$(31) \quad \varphi(y) = \left\{ 1 - \frac{1}{\beta_0^2} y(2 - y) \right\}^{1/2}, \quad \beta_0 = \frac{ep_0}{E_0}.$$

Now we have (fig. 1)

$$\begin{aligned} p_{0x} &= -p_0 \cos \vartheta_1, \\ p_x &= -p_0 \cos \vartheta_1 + \Delta p, \end{aligned}$$

and applying the Carnot theorem

$$\left\{ \begin{array}{l}
 p_{0x} = -p_0 \frac{1 - \varphi(y) \cos \vartheta}{\{1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta\}^{1/2}}, \\
 p_x = -p_0 \frac{\varphi(y) \cos \vartheta - \varphi^2(y)}{\{1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta\}^{1/2}}, \\
 p_{0x}E + p_x E_0 = -p_0 E_0 \frac{(1 - y)(1 - \varphi(y) \cos \vartheta) + \varphi(y) \cos \vartheta - \varphi^2(y)}{\{1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta\}^{1/2}},
 \end{array} \right. \\
 (32) \quad \frac{d\sigma_{nm}}{d\omega} = \frac{4e^4}{c^4} \frac{p}{p_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2 - \left(\frac{E_0 - E}{c} \right)^2} \times \right. \\
 \times \left\{ \frac{1}{2} |I_{n_1 m_1}|^2 [c^2 p p_0 \cos \vartheta + \mu^2 c^4 + E E_0] + \frac{p_0 E_0 (1 - \varphi^2(y) - y(1 - \varphi(y) \cos \vartheta))}{\{1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta\}^{1/2}} \times \right. \\
 \left. \left. \times \left[\frac{r_m k}{2} |I_{n_1 m_1}|^2 - \frac{r_{m_1}}{a} |I_{n_1 m_1}| \left(m_1 |I_{n_1 m_1-1}| + \frac{1}{2} |I_{n_1 m_1+1}| \right) \right] \right\}.
 \right]$$

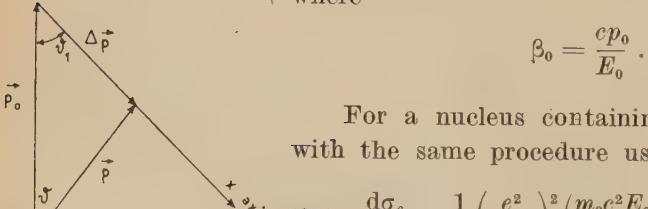
The case of the coherent scattering, is obtained introducing in equation (32)

$$n_1 = m_1; \quad E = E_0; \quad y = 0; \quad \varphi(y) = 1; \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}_0|;$$

one gets immediately

$$(33) \quad \frac{d\sigma_{nn}}{d\omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \left(\frac{m_0 c^2 E_0}{(c p_0)^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} |I_{n_1 n_1}|^2 \left(1 - \beta_0^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right),$$

where



For a nucleus containing Z protons one gets, with the same procedure used in I,

$$(34) \quad \frac{d\sigma_c}{d\omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \left(\frac{m_0 c^2 E_0}{(c p_0)^2} \right)^2 \frac{Z^2}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} F^2 \left(\frac{Q_0^2}{2} \right) \left(1 - \beta_0^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right),$$

Fig. 1.

which differs from equation (39), deduced in I, only for the factor $(1 - \beta_0^2 \sin^2 \vartheta/2)$. The same factor was obtained by CORBEN and SCHWINGER (8) in the case of the scattering of a particle of spin 1/2 by a point-charge.

For $\beta_0 = 1$ it reduces to $(1 + \cos \vartheta)/2$ which can be compared with the factor $(1 + \cos^2 \vartheta)/2$ appearing in the intensity of scattered X rays on account of the transversal polarization of quanta.

The incoherent scattering cross section can be put in the form

$$(35) \quad \frac{d\sigma_i}{d\omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \left(\frac{m_0 c^2 E_0}{(cp_0)^2} \right)^2 \frac{Z}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \Pi',$$

where

$$(36) \quad \Pi' = \frac{1}{Z} \sum \alpha'_{m_1 - n_1} |I_{n_1 m_1}|^2,$$

$$(37) \quad \alpha'_{m_1 - n_1} = \frac{4\varphi(y) \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}{\left[1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^2 \right]^2} \times$$

$$\times \left\{ (2 - y)^2 - \beta_0^2 (1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta) - \right.$$

$$- \frac{4\beta_0 r_m p_0}{\hbar} \frac{1 - \varphi^2(y) - y(1 - \varphi(y) \cos \vartheta)}{[1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta]^{1/2}} \times$$

$$\left. \times \left[(1 + \varphi^2(y) - 2\varphi(y) \cos \vartheta) - \frac{\hbar}{p_0 a} \left(m_1 \frac{|I_{n_1 m_1 - 1}|}{|I_{n_1 m_1}|} + \frac{1}{2} \frac{|I_{n_1 m_1 + 1}|}{|I_{n_1 m_1}|} \right) \right] \right\}.$$

3. - The case of μ -mesons.

The influence of the spin-spin interaction on the scattering of μ -mesons by light nuclei can be seen from figures 2, 3, 4, 5 where we have plotted, as a function of ϑ ,

$$(38) \quad \left(1 - \beta_0^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) F^2 + \frac{\Pi'}{Z},$$

in full lines and

$$(39) \quad F^2 + \frac{\Pi}{Z},$$

in broken lines. (38) and (39) have been calculated assuming the radius of the protons equal to zero ($r_0 = 0$, see I) and for μ -mesons of total energy $E_0 = 200$ MeV, $E_0 = 600$ MeV, colliding against Li and C nuclei.

The small decrease of the differential cross section at 200 MeV is due to the « polarization factor » $(1 - \beta_0^2 \sin^2 \vartheta/2)$; the small increase of the diffe-

rential cross section at 600 MeV is due to the prevailing of the increase of the incoherent scattering produced by the spin-spin interaction.

From the inspection of figures 2, 3, 4, 5 we can conclude that, in the considered energy interval, the influence of the spin-spin interaction on the

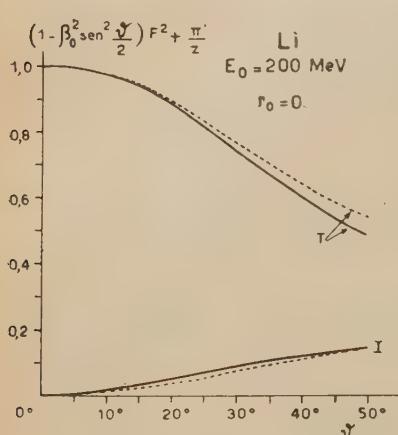


Fig. 2.

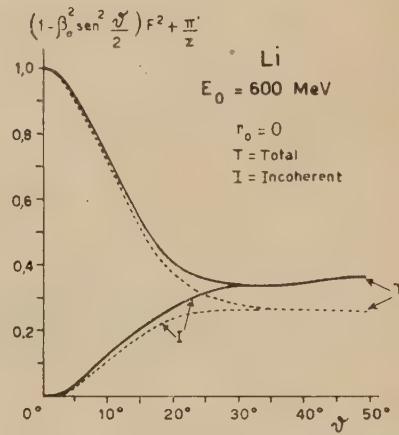


Fig. 3.

scattering of μ -mesons by light nuclei is rather small. For this reason we have not calculated (38) for values of the radius r_0 of the proton different

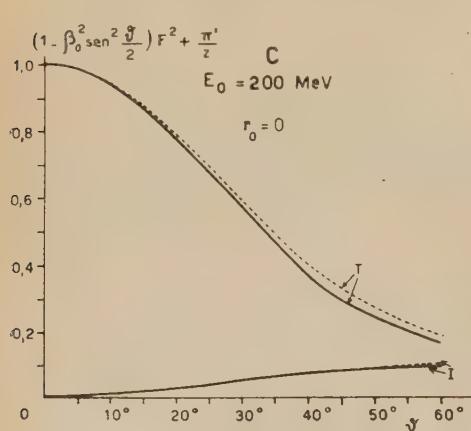


Fig. 4.

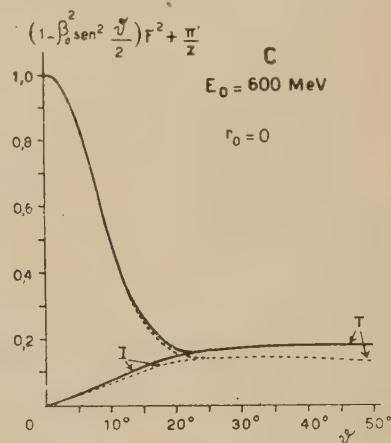


Fig. 5.

from zero; the influence of a finite value of r_0 can be seen from the figures 2, 3, 4, 5 of I.

4. - The case of electrons.

Electrons have a very weak interaction with neutrons (10); therefore one can think to use these particles in scattering experiments by light nuclei of the type considered until now for μ -mesons.

For electrons of total energy of the order of a few hundred MeV, we can assume

$$E = cp,$$

so that equation (37) reduces to

$$(39) \quad \begin{cases} \alpha'_{m-n} = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \left\{ 1 - \frac{2r_m p_0}{\hbar} \frac{y}{\gamma^{1/2}} \left[\gamma - \frac{\hbar}{p_0 a} \left(m \frac{|I_{nm-1}|}{|I_{nm}|} + \frac{1}{2} \frac{|I_{nm+1}|}{|I_{nm}|} \right) \right] \right\}, \\ \gamma = 4(1-y) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + y^2. \end{cases}$$

As an example, we have calculated (38) for electrons of total energy $E_0 = 300$ MeV and for two different values of the electromagnetic radius of

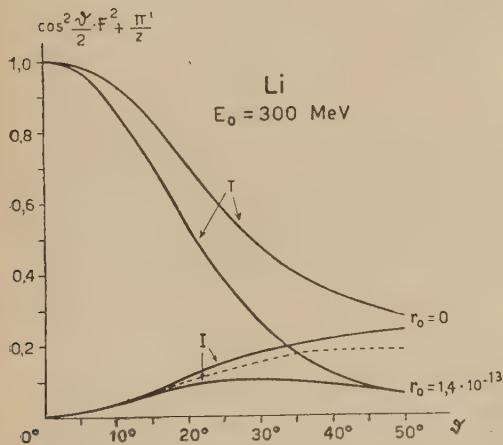


Fig. 6.

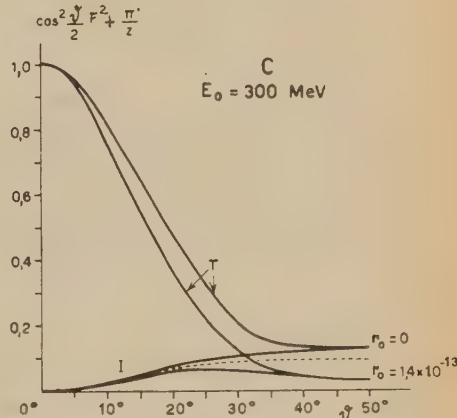


Fig. 7.

the proton: $r_0 = 0$ and $r_0 = \hbar/M_\pi c^2 = 1.4 \cdot 10^{-13}$ cm. The corresponding quantity (38) is plotted in fig. 6 and 7 for collisions against Li and C nuclei.

About the broken lines appearing in these figures we will talk in section 5.

Before concluding that a scattering experiment of this type can give some information about the nuclear structure or the electromagnetic radius of the protons, we have to discuss two other effects that have been already mentioned in section 1, i.e. the influence of the radiative forces on the scattering and the electron-electron collisions. About the first effect we note that it does not

change the differential cross-section by more than 2 or 3 percent (12); therefore it can be neglected at least as long as we represent a light nucleus with such a rough model as the parabolic well.

The differential cross section $d\sigma_e/d\omega$ for electron-electron collision is much larger than the corresponding cross section for scattering by nuclei (13). However the energy E_e of both electrons after the collision is much smaller than that of the electrons scattered inelastically by the nuclei as one can see from Table I where we give as an example $d\sigma_e/d\omega$ and E_e as a function of ϑ for $E_0 = 300$ MeV.

TABLE I.

ϑ	$d\sigma_e/d\omega$ in cm^2	E_e in MeV
5°	$2,69 \cdot 10^{-26}$	93,5
10°	$4,54 \cdot 10^{-26}$	30,2
15°	$6,92 \cdot 10^{-26}$	13
20°	$1,07 \cdot 10^{-25}$	7,9
25°	$1,43 \cdot 10^{-25}$	5,1
35°	$2,36 \cdot 10^{-25}$	2,6
50°	$4,89 \cdot 10^{-25}$	1,3

Finally we note that disposing of electrons of a few hundred MeV one could deduce information about the electromagnetic radius of the proton by scattering experiments in hydrogen and, after that, by means of scattering experiments with light nuclei, one could investigate the nuclear structure and particularly the interference effects considered in the next section.

5. — Conclusions.

As a conclusion of our phenomenological considerations about the electromagnetic scattering of μ -mesons or electrons by light nuclei, we will discuss, very briefly, a point mentioned at the beginning of I, i.e. the contribution due to the neutrons present in the nucleus.

Such a discussion will also contribute to clarify the relations existing between our phenomenological point of view and a complete theory of the

(12) N. F. MOTT: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **27**, 255 (1931); SHINJI ENDO, TORCHIRÔ KINOSHITA and ZIRÔ KOBA: *Progress Theor. Phys.*, **4**, 218 (1939).

(13) N. F. MOTT and A. S. W. MASSEY: *The Theory of Atomic Collisions* (second edition), page 368.

scattering of μ -mesons or electrons by light nuclei based on the knowledge of the mesonic field of the nucleons.

If the coupling between the nucleon and the mesonic field is so weak that the only important states are those with 0 or 1 emitted mesons, we can describe the charge density of a nucleon surrounded by its mesonic field as the sum of the charge densities (multiplied by convenient weights) of the « pure proton » state and of each one of the different types of emitted mesons. For instance if the emitted mesons are of a single type, say π , we have, for a proton,

$$(41) \quad \rho_p = t\rho_P + (1-t)\rho_\pi,$$

and for a neutron

$$(42) \quad \rho_n = (1-t)(\rho_P - \rho_\pi),$$

where ρ_P is the charge distribution of the « pure proton » state, ρ_π the charge distribution of the emitted π -meson, and t the fraction of time during which the proton is in the « pure proton » state and the neutron in the « pure neutron » state. Now it is very reasonable to expect that ρ_P is different from zero in a region of the order of $r_m = \hbar/M_\pi c^2$ and ρ_π in a region of the order of $r_\pi = \hbar/M_\pi c^2$. If we assume for the two functions ρ_P and ρ_π respectively a δ function and a gaussian function, we can apply the considerations of I section 6 and say that the matrix element corresponding to the transition of a proton from its nuclear state n to its nuclear state m is given by

$$(43) \quad H_{nm}[t + (1-t)T],$$

where T is the nucleon-form factor given in I section 6; H_{nm} is the matrix element calculated for a point-charge proton.

In a similar way we get that the matrix element corresponding to a neutron undergoing the same transitions $n \rightarrow m$ is given by

$$(44) \quad H_{nm}(1-t)[1-T].$$

In order to get the cross section for scattering of μ -mesons or electrons by a light nucleus of mass number $A = Z + N$, we have to sum together the contributions due to the Z protons and to the N neutrons. In doing this sum we can take advantage of the fact that in a nucleus the largest possible number of protons occupy the same quantum state occupied by neutrons. Therefore we can do the sum operation in two steps; first we will consider the contributions of the two nucleons (a proton and a neutron) belonging to the same quantum state and after that we will sum together the contributions of all nucleons pairs and of all impaired nucleons (usually only 1).

In order to calculate the cross section for coherent scattering, we have to sum together (43) and (44), taken both for $m = n$:

$$(45) \quad H_{nn}[t + (1-t)T + (1-t)(1-T)] = H_{nn}.$$

Equation (45) shows that the electromagnetic coherent scattering of the neutron interferes with the coherent scattering of the corresponding proton, so that the effect of the finite value of the electromagnetic radius of the nucleons cancels completely for each pair of nucleons.

For the incoherent scattering we have to sum the squares of the moduli of (43) and (44), so that we get

$$(46) \quad |H_{nm}|^2 [(t + (1-t)T)^2 + (1-t)^2(1-T)^2] = \\ \cong |H_{nm}|^2 [1 - 2t + 2t^2 + 2(1-t)^2T^2 + 2T(3t - 2t^2 - 1)].$$

Therefore we can conclude that, as long as we can represent the charge distribution of the nucleons by means of equations of type (41) and (42), the finite dimensions of their charge distribution does not affect the coherent scattering, if $N = Z$, and only slightly if $N \neq Z$; the incoherent scattering is affected according to expressions of type (46).

In fig. 6 and 7 we give (broken lines), as an example of the interference effect, the incoherent scattering obtained by equation (46) assuming $t = 4/5$ (14). The effect of the finite value of the radius is small but still observable.

If the coupling between the nucleons and the mesonic field is so strong that we can no more neglect the states in which 2 or more mesons are emitted, the charge density of a nucleon surrounded by its mesonic field can not be expressed by equations of type (41) and (42). In other words there are interference effects between the various terms corresponding to different internal states of the nucleon, and it can be that, also for the coherent scattering, the contributions of the two nucleons belonging to the same quantum state do not cancel completely as it happens in equation (45). A more detailed discussion of what happens in this case needs a deeper insight into the nature of the mesonic field employed.

The only qualitative consideration that we like to add is that, if the coupling between nucleons and mesonic field is very strong, the exchange of mesons among the nucleons inside the nucleus can be so frequent that the charge distribution tends to spread over the whole volume of the nucleus itself.

Our thanks are due to Prof. B. FERRETTI, Prof. I. I. RABI and Dr. MORPURGO for valuable discussions.

(14) See for instance: H. FRÖLICH, W. HEITLER and N. KEMMER: *Proc. Roy. Soc., A*, **166**, 154 (1938).

RIASSUNTO

Estendendo i risultati di un precedente lavoro, viene discusso, in approssimazione di Born, l'urto elettromagnetico di un corpuscolo di spin 1/2 contro un nucleo leggero rappresentato con un modello ad un solo corpuscolo. Vengono calcolate le sezioni d'urto differenziali sia per sparpagliamento coerente che incoerente per mesoni di 200 e 600 MeV e per elettroni di 300 MeV contro nuclei di Li e C. Questi risultati vengono confrontati con quelli di un precedente lavoro in cui si trascurava lo spin della particella incidente. Il lavoro si chiude con una breve discussione del contributo dato dai neutroni presenti nel nucleo, allo sparpagliamento elettromagnetico, nella quale si tiene conto delle dimensioni finite dei nucleoni.

Evidence for the multiple production of mesons in a single nucleon-nucleon collision (*).

J. J. LORD, J. FAINBERG and M. SCHEIN

Department of Physics, University of Chicago

(ricevuto il 4 Settembre 1950)

Summary. — Evidence has been obtained for the multiple production of mesons in a single nucleon-nucleon collision in a photographic emulsion exposed to the cosmic radiation at an altitude of 95 000 ft. The nuclear encounter in which the mesons were created was produced by a primary proton of 3×10^{13} eV energy. Directly in line with the incident proton, 7 particles of minimum ionization were emitted in a central core with an angular divergence of 0.003 radian. In addition, 8 other minimum ionization particles were emitted in a wider diffuse cone of 0.13 radian angular divergence. Only one track had the appearance of a fragment which, however, could have been a proton of 10 MeV energy. Most of the particles in the central core had energies in excess of 250 GeV, while those in the diffuse cone were of much lower energies as determined by small angle scattering measurements. A pair of very small angular divergence was produced in the central core 4800 microns from the point of origin of the nuclear interaction. Assuming that the pair were produced by a gamma ray from the decay of a neutral meson, a lower limit of 2×10^{-15} seconds was deduced for its mean life. Both the angular and the energy distribution of the emitted particles is in good agreement with the assumption that in the center of mass system the mesons are emitted in two distinct cones of angular width of about 30° forward and backward with reference to the direction of the primary proton. The average multiplicity of 15 agrees with the recent calculation by FERMI, and according to his prediction about one half of the particles are made up of nucleon-antinucleon pairs.

(*) Assisted by the joint program of the Office of Naval Research and the Atomic Energy Commission.

Thus far no clear cut evidence has been obtained in which a high energy particle has produced more than one meson in a single nucleon-nucleon collision. In several nuclear interactions observed in photographic plates (1,2,3,4,5) on the order of 25 or 30 minimum ionization tracks were produced which have been shown to be predominantly mesons (6). In all cases, however, the interactions occurred with silver or bromine nuclei, so that the contribution to the production of mesons by the numerous energetic secondaries could not be estimated. In the case of the star observed by the Rochester group (5), the impinging particle was not a single nucleon but an alpha-particle of very high energy colliding with the nucleus of a heavy atom of the emulsion, as demonstrated by the many heavy tracks present. Numerous mesons were shown to be produced; however, in spite of the strong case for the multiple production of mesons in a single act, many secondary mesons emitted in successive collisions were distributed over such a wide angle cone that they had to be the result of plural production within the same nucleus (7).

The event shown in fig. 1 gives an example of the multiple production of mesons in a single act by an extremely high energy proton. This event was observed in an Ilford G-5 type emulsion 200 μ in thickness which was exposed to the cosmic radiation in the stratosphere. A free balloon (8) supported the plates at an elevation above 90 000 ft for over 16 hours.

The event occurred about mid-way between the surfaces of the emulsion, and most of the tracks are very nearly parallel to the surface. Track A of minimum ionization extends over 10 000 μ in the emulsion and is taken to be the incident primary proton producing the nuclear interaction. Track B passes into the glass after a short distance and cannot be identified; however, a proton of about 10 MeV would produce a track of similar appearance. Track C is a 200 MeV proton, as determined from its small angle scattering and grain density.

The other 15 tracks, all of minimum ionization, lie in a narrow cone

(1) R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING and C. F., POWELL: *Phil Mag.*, **40**, 862 (1949).

(2) M. SCHEIN, J. J. LORD and A. ELSTON: *Echo Lake Cosmic Ray Symposium*, page 66, Office of Naval Research (1949); J. J. LORD and M. SCHEIN: *Phys. Rev.*, **77**, 19 (1950).

(3) J. HORNBOSTEL and E. O. SALANT: *Phys. Rev.*, **76**, 859 (1949).

(4) L. LEPRINCE-RINGUET, F. BOUSSER, HOANG TCHANG FONG, L. JAUNEAU and D. MORELLET: *Compt. Rend.*, **229**, 163 (1949).

(5) M. F. KAPLON, B. PETERS and H. L. BRADT: *Phys. Rev.*, **76**, 1735 (1949).

(6) P. H. FOWLER: *Phil Mag.*, **41**, 169 (1950).

(7) W. HEITLER and L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc. Lond.*, A **62**, 669 (1949).

(8) The assistance of the Office of Naval Research and the General Mills Co. is gratefully acknowledged.

directly opposite the incident track *A*. In the upper section of fig. 1, five of the minimum ionization tracks can easily be seen. The other 10 tracks are so closely spaced that they appear as a single heavy black track. The lower section of fig. 1 shows these 10 tracks at a distance of 4800 μ from the nuclear interaction where they are more widely separated and all but two of them are easily resolved.

The arrow marked γ on the lower section of fig. 1 is directed toward a point in the region of the core where a pair of charged particles originate and travel parallel to the other tracks in the core. In the region shown in fig. 1, the angle between the tracks is so small that they appear as a single track.

TABLE I.

Track Numbered from right to left in Fig. 1	Length of track in emulsion of first plate in microns	$p\beta$ in GeV/c
<i>A</i>	11 000	30 000
<i>B</i>	176	.01
<i>C</i>	2 700	.36
electron Pr_1	3 450	3.6
electron Pr_2	4 200	3.0
Diffuse cone		
1	605	
2	1 300	
3	10 600	
4	3 040	
5	9 630	
6	2 310	
7	2 300	
8	2 620	
Central core		
1'	6 990	50
2'	9 400	250
3'	10 250	250
4'	11 700	250
5'	11 700	250
6'	10 000	250
7'	9 500	86

(*) On the remaining 6 tracks in the diffuse cone accurate determinations of momentum are in progress, and will be reported at a later date.

J. J. LORD,
J. FAINBERG
and
M. SCHEIN

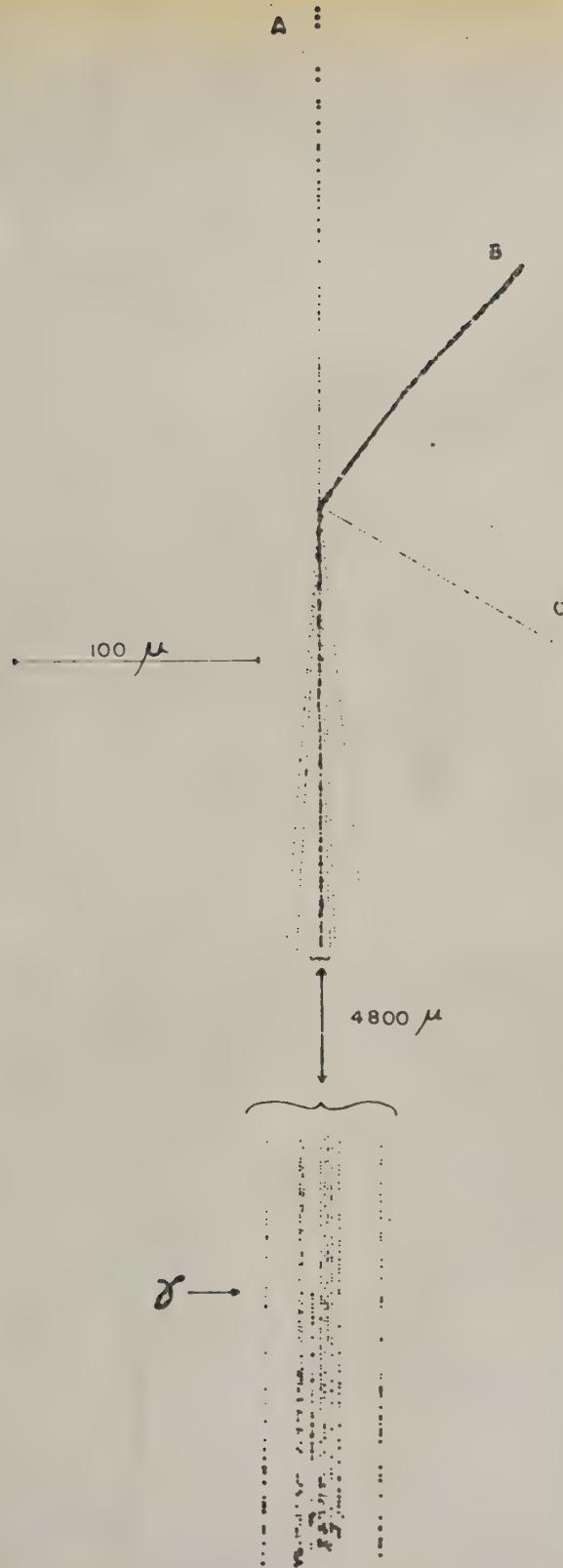


Fig. 1.

The angular distribution of the tracks in the core is shown in fig. 2. It is to be noticed that the curve in fig. 2 shows the manner in which 7 minimum ionization particles were emitted in an extremely narrow bundle of 0.003 radian half width (central core) and the other 8 in a considerably larger cone of 0.13 radian half width (diffuse cone). Since all of the particles in the central

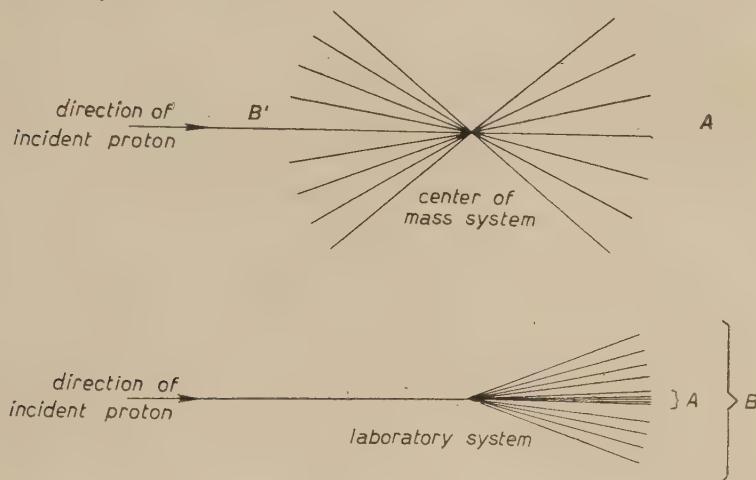


Fig. 2.

core and some of those in the diffuse cone remain in the emulsion for over 10 000 μ (see Table I), it has been possible to systematically measure the relative separation of the tracks, and hence to determine by accurate measurements of the small angle scattering (6) their momentum. Either the measured value or lower limit for the momentum times velocity (9) is given in Table I for each of the tracks. It is to be noted that the energies E , as deduced from the momentum p , of 5 of the tracks in the central core exceed 250 GeV while the particles of lower energy are found to be in the larger diffuse cone.

The momentum of the two particles forming the pair γ , in fig. 1, are given in Table I. Assuming that the pair consists of electrons originating from one of the two gamma rays emitted in the decay of a neutral meson, it is possible to make estimates of the energy of this neutral meson. It can easily be shown that the energy of the neutral meson is given by the following relation:

$$E = Mc^2 (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{Mc^2 \sqrt{\left(\frac{h\nu'}{h\nu}\right)^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta - \beta}.$$

(9) At these very high values of momentum $\beta \approx 1$ and $E \approx pc$.

Mc^2 = rest energy of proton.

θ = angle between gamma ray and the direction of motion of the neutral meson in the laboratory system of coordinates.

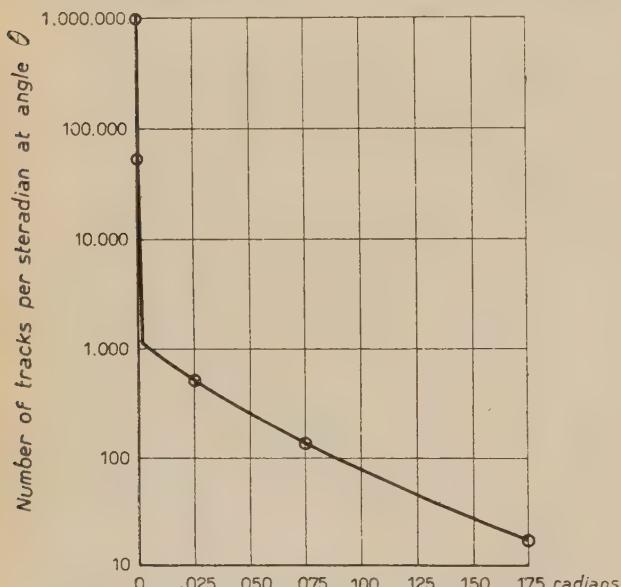
$h\nu$ = energy of the gamma ray in the laboratory system of coordinates.

$h\nu'$ = energy of the gamma ray in the reference frame fixed to the neutral meson (equal to 1/2 of mass energy of neutral meson ⁽¹⁰⁾; about 75 MeV).

The pair γ was produced in the central core and the electrons remained in the core over their whole length in the emulsion (4000 μ). Hence the gamma ray, in the laboratory system of coordinates, was emitted at an angle with respect to the direction of motion of the neutral meson of the same order of magnitude as the angle between the tracks in the narrow cone (0.001 radian). These conditions are satisfied in the above equation by either a meson (a) of approximately 1000 GeV or (b) by one of 10 GeV energy. Since 6 of the

ionizing particles emitted in the narrow core were shown to have energies greater than 250 GeV, one has to assume that the energy of the neutral meson was that of type (a). Otherwise the assumption would have to be made that meson (b) was emitted almost directly backward in the center of mass reference frame (less than 0.003 radian with respect to the incident proton).

An upper limit of the mean life of the neutral meson (b) may be obtained by assuming that the materialization of the gamma rays occurred at



θ - Angle between emitted track and selected incident direction

Fig. 3.

the maximum distance of 4800 μ from the origin of the star. This yields a mean life for the meson (b) which must be less than $2 \cdot 10^{-15}$ s.

⁽¹⁰⁾ R. BJORKLUND, W. E., CRANDALL, B. J. MOYER and H. F. YORK: *Phys. Rev.*, 77, 213 (1950).

An estimate of the energy of the incident proton causing this high energy interaction, fig. 1, can be obtained by considering the collision in the center of mass reference system determined by the incident proton and the target nucleon. The unusually sharp break in the angular distribution curve, fig. 2, for the emitted particles and their very much higher energy in the central core than in the diffuse cone, make it necessary to assume that the 7 tracks in the central core were due to particles emitted in the forward direction (*A* in fig. 3) in the center of mass system. The 8 tracks of lower energies in the diffuse cone are thus the particles emitted in the backward direction (*B* in fig. 3). Accordingly, the energy of the incident proton which is responsible for the production of this star is given by:

$$E = Mc^2 \gamma \approx 2Mc^2 \gamma_c^2 \approx 2Mc^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \theta'/2}{\operatorname{tg}^2 \theta},$$

where:

$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ in the laboratory system,

$\gamma_c = (1 - \beta_c^2)^{-1/2}$ with β_c the velocity of the center of mass reference frame, θ = half width of the central core in the laboratory system of coordinates (0.003 radian),

and

θ' = half width of the central core in the center of mass system.

The estimated energy is not strongly dependent upon the value of θ' . However, $\theta' = 40^\circ$, as approximately given by FERMI's new formulation of the interaction of high energy particles, gives $E = 3 \cdot 10^{13}$ eV or about 48 ergs. The energy of the primary proton was also calculated from the half width of the diffuse cone and was found to be in good agreement with the above mentioned value. This is undoubtedly the highest energy of a single proton which has thus far been directly observed in nature.

The complete lack of slow particles around the central core (fig. 2) and the fact that only one track could be an ordinary star evaporation nucleon, clearly demonstrates that we are dealing here almost entirely with a nucleon-nucleon interaction either in a very light element or possible in a Deuteron or Hydrogen nucleus present in the emulsion. It is of particular interest to see that even for energies as high as $3 \cdot 10^{13}$ eV the number of charged particles of minimum ionization produced in a single act is as low as 15. The pair of particles produced in the core 4800μ from the point of interaction is most probably an electron pair formed by a gamma ray from the decay of a neutral meson. Since this distance represents only about 0.2 radiation units, it seems probable that additional neutral mesons were produced in this very high energy nuclear encounter.

The new calculation by FERMI (11) predicts that in the above described star, there would be about 16 high energy charged particles produced by the $3 \cdot 10^{13}$ eV proton. This is in excellent agreement with the total of 15 sharply collimated minimum ionization tracks which were observed. In addition, FERMI postulates that if nucleon-antinucleon pairs should be produced in addition to mesons, at the extremely high energy of the primary ($3 \cdot 10^{13}$ eV), the number of emitted particles would then be nearly equally divided between meson and nucleon antinucleon pairs.

The multiplicity observed here is considerably lower than that calculated by other authors (12,13). LEWIS, OPPENHEIMER, and WOUTHUYSEN estimate the production of a few hundred mesons by a proton of $3 \cdot 10^{13}$ eV energy and HEISENBERG predicts a similar number at this same primary energy.

This report gives only the results of a preliminary investigation carried out in the emulsion in which the star originates. The emitted tracks pass into a second emulsion in which each of them travels about 20 000 μ . The analysis in the second emulsion will be published later.

We wish to thank Professor FERMI for very illuminating discussion of this nuclear interaction in relation to his new theory, and for his valuable suggestions concerning the small angle scattering of the emitted particles.

(11) E. FERMI: Private communication (1950).

(12) H. W. LEWIS, J. R. OPPENHEIMER and S. A. WOUTHUYSEN: *Phys. Rev.* **73**, 127 (1948).

(13) W. HEISENBERG: *Nature*, **164**, 65 (1949).

RIASSUNTO

In una emulsione fotografica esposta alla radiazione cosmica ad un'altezza di 95000 piedi s.l.m. è stata rinvenuta una prova a favore della produzione multipla di mesoni in un singolo urto nucleone-nucleone. L'urto nucleare in cui i mesoni furono prodotti, fu causato da un protone primario di $3 \cdot 10^{13}$ eV di energia. Direttamente in linea col protone incidente furono emesse 7 particelle a ionizzazione minima in un cono centrale di 0.003 radianti di divergenza angolare. Inoltre altre 8 particelle a ionizzazione minima furono emesse in un cono maggiormente diffuso di divergenza angolare di 0.13 radianti. Solo una traccia aveva l'aspetto di un frammento il quale, nondimeno, potrebbe essere stato un protone con energia di 10 MeV. La maggior parte delle particelle del cono centrale era dotata di energie superiori a 250 GeV, mentre quelle contenute nel cono diffuso possedevano energie notevolmente inferiori, come si è determinato con la misura dei piccoli angoli di scattering.

Una coppia con piccolissima divergenza angolare fu prodotta nel cono centrale a 4800μ dal punto d'origine dell'interazione nucleare. Ammettendo che la coppia sia stata prodotta da un raggio γ derivante dal decadimento di un mesone neutro, se ne dedusse per la sua vita media un limite inferiore di $2 \cdot 10^{-15}$ secondi. Le distribuzioni angolare ed energetica delle particelle emesse si trovano in buon accordo con l'ipotesi che nel sistema del baricentro i mesoni vengano emessi in due distinti coni opposti al vertice di circa 30° di apertura, con riferimento alla direzione del protone primario. La molteplicità media di 15 è in accordo coi recenti calcoli di FERMI e, secondo le sue previsioni, circa metà delle particelle sono coppie nucleone-antinucleone.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Ancora sull'operatore $S(\sigma)$ di Dyson-Feynmann.

B. FERRETTI

Istituto di Fisica della Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 26 Luglio 1950)

Come osservavo in una precedente lettera ⁽¹⁾ (che sarà indicata con (I)) l'operatore $S(\sigma)$ di DYSON ⁽²⁾ si può considerare, qualora si accenda adiabaticamente la carica, come generatore di una trasformazione canonica che rende diagonale l'hamiltoniana totale nella rappresentazione in cui è diagonale l'hamiltoniana dei campi liberi, almeno nel caso in cui un calcolo perturbativo sia possibile, e la energia possegga soltanto uno spettro continuo di autovalori.

Osservavo sul finire della (I) come fosse desiderabile generalizzare il risultato ottenuto al caso della esistenza di autovalori discreti della energia; in questo caso infatti sarebbero possibili applicazioni di notevole interesse fisico della osservazione in questione.

Ora, la generalizzazione in parola si presenta tutt'altro che ovvia, ed è mia intenzione trattare in questa lettera una questione preliminare alla generalizzazione stessa.

Se si eseguiscono i calcoli indicati in (I) per passare dalla (5) alla (6) nel caso di un Hohlraum V finito, e senza passare al limite per V tendente all'infinito, non si ritrova più esattamente la (6), ma in questo caso, risulta che non tutti i termini non diagonali sono nulli.

D'altra parte se si definisce la $S(\sigma)$ mediante un prodotto infinito (cfr. la (10)) del citato lavoro di DYSON (che d'ora innanzi sarà indicato con D.) invece che mediante la (24) di D., e se si usa l'artificio della accensione adiabatica della carica, si può dimostrare che la S così definita, se esiste, deve diagonalizzare l'hamiltoniana, in quanto la trasformazione canonica relativa si può considerare come il prodotto di infinite trasformazioni canoniche infinitesime, ciascuna delle quali mantiene diagonale l'hamiltoniana variata per il corrispondente incremento infinitesimo della carica.

Le precedenti osservazioni mostrano che la (24) di D. non è in generale equivalente alla analoga della (10) di D., anche se, per rendere convergenti gli integrali che compaiono nella (24) di D. (che per sè non lo sarebbero), si introduce un fattore di convergenza corrispondente all'accensione adiabatica della carica. La ragione di questa difficoltà non dipende dalla teoria dei campi, ma è di natura più generale

⁽¹⁾ B. FERRETTI: *Nuovo Cimento* **7**, 79 (1950).

⁽²⁾ DYSON: *Phys. Rev.* **75**, 486 (1949).

e risiede nel metodo che è stato usato per la soluzione della equazione di Schrödinger del problema. Si consideri infatti semplicemente una hamiltoniana della forma

$$(1) \quad H = H_0 + \lambda V,$$

dove H_0 è una qualche hamiltoniana imperturbata, V una qualche energia potenziale, e λ lentissimamente crescente con il tempo t (λ è nullo per t tendente a $-\infty$).

Posto

$$(2) \quad \underline{V} = \exp [iH_0 t] V \exp [-iH_0 t],$$

è facile definire formalmente una $S(t)$ come prodotto infinito:

$$(3) \quad S(t) = \lim_i \prod_i (1 - \lambda(t_i) \underline{V}(t_i) \Delta t_i),$$

il prodotto estendendosi da t a $-\infty$ (i termini relativi a tempi seguenti vanno posti a sinistra di quelli relativi a tempi precedenti) e intendendosi preso al limite per ogni Δt_i infinitesimo.

Viceversa, l'analogia della (24) di D. sarebbe:

$$(4) \quad S(t) = 1 - i \int_{-\infty}^t \lambda \underline{V}(t_1) dt_1 - \int_{-\infty}^t \lambda(t_1) \underline{V}(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} \lambda(t_2) \underline{V}(t_2) dt_2 + \dots$$

Poichè la (4) si riduce sostanzialmente a una espansione in serie di potenze di λ si potrebbe pensare a prima vista che la (4) dovrebbe essere equivalente alla (3) ogniqualvolta la teoria delle perturbazioni fosse applicabile alla soluzione della equazione di Schrödinger relativa alla hamiltoniana (1). Ora le cose non stanno precisamente così. Infatti se si suppone, per fissare le idee, che lo Hohlraum sia finito (e quindi tutti i livelli siano discreti indipendentemente da λ) e che per $t = -\infty$ lo stato del sistema sia lo stato stazionario ψ_{0n} di H_0 , poichè facciamo crescere λ adiabaticamente, per un noto teorema lo stato del sistema all'istante t sarà a meno di infinitesimi ancora lo stato stazionario $\psi_n(\lambda)$ relativo alla hamiltoniana $H_0 + \lambda V$. Si avrà cioè

$$\psi(t) = \psi_n(\lambda, t) = \bar{\psi}_n(\lambda) \exp \left[-i \int_{-\infty}^t E_n(\lambda) dt \right];$$

$E_n(\lambda)$ essendo l'autovalore corrispondente a $\psi_n(\lambda)$, dove $\bar{\psi}_n(\lambda)$ non dipende esplicitamente dal tempo. Si scorge allora immediatamente che anche se $\bar{\psi}_n(\lambda)$ e $E_n(\lambda)$ sono sviluppabili in serie di potenze di λ , $\psi(t)$ non lo sarà proprio nel caso di una

perturbazione adiabatica, a causa del fattore $\exp \left[-i \int_{-\infty}^t E_n(\lambda) dt \right]$.

Questa osservazione rende conto e della difficoltà che abbiamo rilevato, e della ragione per la quale essa non si presentava nel caso considerato in (I); inoltre suggerisce un metodo per sormontare la difficoltà stessa. Tale metodo consiste sostanzialmente in una nuova prescrizione per sommare gli integrali non convergenti che compaiono nella (24) di D. e che in generale deve essere applicata invece della mera sostituzione di un fattore di convergenza al posto della carica. Per sommi capi esso si riduce al metodo seguente: si spezzi il prodotto infinito che compare in (3) in

fattori $\prod_{t_r}^{t_{r+1}}$ relativi all'intervallo di tempo t_r a t_{r+1} in cui λ passa dal valore λ_r al valore $\lambda_r + \Delta\lambda_r$.

Sia, per t compreso tra t_r e t_{r+1} ,

$$\lambda = \lambda_r + \Delta\lambda_r \chi(t),$$

dove $\chi(t)$ varia monotonicamente tra zero e uno.

$\prod_{t_r}^{t_{r+1}}$ si può allora sviluppare e calcolare con una formula analoga a (4) con le seguenti avvertenze:

- a) si trascurano tutti i termini $O(\Delta\lambda^2)$;
- b) si pongono uguali a zero tutti i termini provenienti, a quadrature avvenute, dai limiti inferiori degli integrali (ciò corrisponde in sostanza ad assumere $\chi(t)$ nullo e le sue derivate di qualunque ordine trascurabili per $t = t_r$).

- c) si eliminano tutti i termini contenenti a fattore integrali del tipo $\int_{t_r}^{t_{r+1}} \chi(t) dt$.

Si può mostrare che le prescrizioni b) e c) servono semplicemente ad eliminare i termini che sarebbero relativi a una (illegittima) espansione di $\exp \left[-i \int_{-\infty}^t E_n(\lambda) dt \right]$.

Così facendo $\prod_{t_r}^{t_{r+1}}$ sarà trasformato in un certo $\prod_{t_r}^{t_{r+1}}$. Si ponga ora

$$(5) \quad \prod_{t_r}^{t_{r+1}} = \exp [iH_0 t_{r+1}] (1 + i\Delta\lambda_r P_r) \exp [-iH_0 t_r],$$

e si definisca

$$(6) \quad S_c(\lambda) = \lim \prod_{t_r}^{t_{r+1}} (1 + i\Delta\lambda_r P_r).$$

Il prodotto (6) si può ora calcolare con una formula analoga alla (4) (soltanto gli integrali saranno fatti rispetto a λ e non rispetto a t) con la sola condizione della applicabilità della teoria delle perturbazioni. Naturalmente S_c non è identica ad S . Si può tuttavia facilmente calcolare S nota S_c . Inoltre S_c gode delle proprietà fondamentali di S .

Resta ancora da considerare il caso in cui la teoria delle perturbazioni non sia applicabile, che è il più interessante e il più difficile.

Pare però che le precedenti considerazioni aprano la via a trattare anche questo caso.

The mean free path of the N component of the cosmic radiation.

G. SALVINI

Palmer Physical Laboratory, Princeton University - Princeton, New Jersey (*).

(ricevuto il 24 Agosto 1950)

Recent observations of nuclear explosions by means of photographic emulsions and cloud chamber techniques indicate that (a) the individual explosions are complicated phenomena in which several nucleons of the same nucleus may take part (¹) (²) (³), so that the nuclear explosions in light and heavy nuclei differ in regard to the number and probably also to the energy and angular spread of the relativistic particles, and (b) that there is a so-called nuclear cascade process resulting from penetrating particles from one nuclear explosion giving rise to new nuclear explosions which may also contain penetrating particles (²), (⁴), (⁵).

This complicated situation makes very difficult an unambiguous measurement of the nuclear mean free path λ of the N component of cosmic rays, and has led to apparent discrepancies in the literature of the subject. (The definition of λ that we follow is $\lambda = 1/n\sigma$, where σ is the total cross section per nucleus for nuclear interaction, and n is the number of nuclei per gram).

This note attempts to show that the data obtained to date may still be internally consistent, when due allowance is made of the limitations of the techniques used in obtaining the data.

In order to compare the results of various workers, the methods of measurements of the collision mean free path should be reduced to their fundamental elements. These elements are represented in fig. 1. They consist of two layers of materials, 1, 3 and two detectors of nuclear explosions, 2, 4. The layer 1 is changed in thickness, not the layer 3. On this basis the main types of experiments may be considered for reliability.

(*) On leave from the University of Milan.

(¹) E. O. SALANT, J. HORNBOSTEL, C. B. FISK and J. E. SMITH: *Phys. Rev.*, **79**, 184 (1950).

(²) A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI and G. TAGLIAFERRI: *Phys. Rev.*, **77**, 284 (1950); *Nuovo Cimento*, **7**, 36 (1950).

(³) L. JANOSSY: *Phys. Rev.*, **64**, 345 (1943).

(⁴) U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK and H. MUIRHEAD: *Philos. Mag.*, **41**, 413 (1950).

(⁵) W. B. FRETTER: *Phys. Rev.*, **76**, 511 (1949).

Experiments of the type of TINLOT and GREGORY (6), (7), (8), (9). - In these experiments all four elements given in fig. 1 were present. Let N_4 be the frequency of nuclear explosions detected in 4 (fig. 1) with only one counter discharged in 2 (i.e. no nuclear explosion detected in 2). If 2 is perfectly efficient in the detection of nuclear explosions produced in layer 1, then layer 1 acts solely as absorber and 3

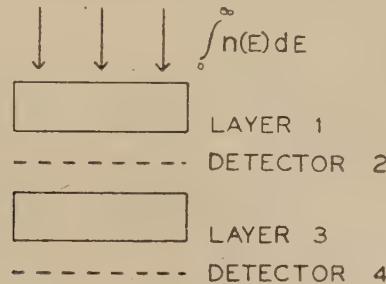


Fig. 1.

as producer, and the nuclear mean free path λ of the incoming particles may be measured in the usual way by measuring N_4 for two different thicknesses X of layer 1:

$$(1) \quad \lambda = \frac{X_2 - X_1}{\ln(N_4(X_1)) - \ln(N_4(X_2))}.$$

However, if detectors 2 and 4 are not perfectly efficient, then the expression (1) is not correct, for N_4 is no longer the frequency of nuclear events produced in layer 3 by particles that did not have any nuclear interaction in layer 1. In this case the value of N_4 can be *approximated* by:

$$(2) \quad N_4(X) = \int_0^{\infty} n(E) \exp[-X/\lambda(E)] p_3(E) p_4(E) dE + \\ + \int_0^{\infty} n(E) (1 - \exp[-X/\lambda(E)]) \left\{ \int_0^E [1 - p_2(E, X, z, \varepsilon)] w(E, z, \varepsilon) p_3(z) p_4(\varepsilon) dz d\varepsilon \right\} dE$$

where:

- $n(E) dE$ is the energy distribution of the N component,
- $\lambda(E)$ is the mean free path of a nucleon of energy E ,
- p_2 is the probability that a nuclear interaction produced in 1 be revealed by detector 2,
- p_3 is the probability that a nuclear explosion be produced in layer 3 by a particle of energy E coming from outside, or by a secondary particle of energy ε produced in layer 1,

(6) J. TINLOT and B. GREGORY: *Phys. Rev.*, **75**, 519 (1949).

(7) G. COCCONI: *Phys. Rev.*, **75**, 1074 (1949); **76**, 984 (1949).

(8) KURT SITTE: *Phys. Rev.*, **78**, 714 (1950).

(9) W. D. WALKER: *Phys. Rev.*, **77**, 686 (1950).

p_4 is the probability that a nuclear explosion produced in layer three 3 be detected in 4,

z indicates a group of parameters which describe the type of the nuclear explosion (angular spread, number of particles, ...),

$w(E, z, \varepsilon)$ is the probability that the primary nuclear explosion produced in layer 1 contain a particle of energy ε ,

X is the thickness of layer 1.

The second integral of (2) gives the contribution to N_4 of the nuclear cascades missed by 2, that should not have been counted if the evaluation of the mean free path is to be made according to (1).

The most questionable assumption made in these experiments is that p_2 is almost equal to one, so that the second integral disappears. This assumption becomes very doubtful for large thicknesses of X . Moreover, the observations of nuclear explosions in nuclear plates show that most of the events contain only one or two ionizing relativistic particles (10). This fact, and the lack of knowledge of the functional relation between the energy of the producing nucleon and the size of the produced nuclear explosion indicate that the error may be serious, particularly when the material of layer 1 is a light element such as Carbon. Our actual ignorance of the function $w(E, z, \varepsilon)$ is a fundamental point, and makes difficult any reliable correction. Consideration of (2) with regard to the dependence on X makes clear that the values of the mean free path deduced from these experiments should be considered as upper limits.

From this point of view, the best experimental values so far obtained would be:

collision mean free path in Pb: ~ 160 g/cm² (cfr. (7), (8), (9))

collision mean free path in Fe: ≤ 135 g/cm² (cfr. (7))

collision mean free path in C: ≤ 100 g/cm² (cfr. (7)).

Experiments of BROADBENT and JANOSSY (11), and of MEYER, SCHWACHHEIM and WATAGHIN (12). - In these experiments, in principle less complete than the preceding, only parts 1 and 2 are present. As a consequence, the quantity measured is near the absorption length, and these measurements yield only an upper limit for the collision mean free path. The measurements of WATAGHIN (12) seem to indicate that in light nuclei this mean free path is near the geometrical.

In the experiments of QUERZOLI and MEZZETTI (13) the experimental apparatus is reduced to parts 3 and 4. The ratio of the mean free paths in different elements may be measured, as the inverted ratio of the numbers of nuclear explosions in layer 3, if p_4 is supposed to be almost one, or at least independent of the element constituting p_3 . This is probably not the case in their experiment, since two penetrating particles were required by detector 4, while 3 was changed from Carbon

(10) R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING and C. F. POWELL: *Philos. Mag.*, **40**, 862 (1949).

(11) D. BROADBENT and L. JANOSSY: *Proc. Roy. Soc.*, **190 A**, 497 (1947).

(12) H. A. MEYER, G. SCHWACHHEIM and A. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **74**, 846 (1948).

(13) L. MEZZETTI and R. QUERZOLI: *Phys. Rev.*, **79**, 168 (1950).

to Lead (14). The plurality (accompanied or not by multiple production) mentioned above in (a) makes it clear that the ratio is a function of the detector, for p_4 is probably a strong function of the atomic weight of 3. This dependence can be confirmed by the results of these same workers, who succeeded to compare the distributions of the penetrating particles from C and Pb in a direct way.

In the experiments with the nuclear plates (4) and the cloud chamber (2), (5) the explosion producing particles have in general themselves come from a previous observed nuclear explosion, and may therefore include mesons as well as nucleons. In nuclear plates the four parts 1, 2, 3, 4, may be considered all simultaneously present, so that the mean free path may be measured more directly, without considering equation (1). The probability p_4 is very close to one, making the photographic plates an almost ideal instrument. So far, the nuclear plates indicate collision mean free paths close to geometric. In cloud chamber experiments p_2 and p_4 are less than one, and results indicate collision mean free paths longer than the geometrical.

In conclusion, it may be considered fairly certain that the collision mean free path in heavy nuclei such as Pb is close to the geometric mean free path.

There remains some doubt concerning the small dependence of the mean free path on the energy and size of nuclear explosions, pointed out by some author (8), (9) and based on Geiger counter experiments, due to the large uncertainty in p_2 . The question of the collision mean free path in light elements, certainly of fundamental interest, is still unresolved.

The author wishes to express his gratitude to Dr. G. T. REYNOLDS for stimulating discussions.

(14) These authors (11) deduced a value $\lambda_{\text{Pb}}/\lambda_{\text{C}} = .3$ from the measurements of LOVATI et al. (2). It is clear now that this deduction was not possible (and was not made by the authors quoted (2)). In fact the nuclear explosions with two or more relativistic particles produced in Pb and C had very different probabilities p_4 of being detected, due to the difference in the average numbers of heavily ionizing particles.

**Considerazioni sullo sviluppo in cascata
della componente penetrante degli sciami estesi.**

A. BORSELLINO

Istituto di Fisica del Politecnico - Milano

G. SALVINI

Istituto di Fisica dell'Università - Milano ()*

(ricevuto il 26 Agosto 1950)

Si può ormai ritenere dimostrato sperimentalmente che le particelle penetranti presenti negli sciami estesi, come vengono rivelate dalle ordinarie disposizioni sperimentali, siano in parte provenienti dall'aria e in parte prodotte localmente negli assorbitori. Per una discussione della controversia a questo riguardo rimandiamo ad una nota di G. SALVINI e G. TAGLIAFERRI⁽¹⁾. Successive esperienze in camera di Wilson di FRETTER⁽²⁾ e di LOVATI, MURA, SALVINI e TAGLIAFERRI⁽³⁾ hanno mostrato che gli eventi in cui le particelle si producono sono esplosioni nucleari.

Nonostante lo stadio poco più che qualitativo delle esperienze attuali, si può fare un tentativo per valutare il rapporto A tra il numero delle particelle provenienti dall'aria e capaci di produrre esplosioni nucleari negli assorbitori (che dovrebbero essere in maggioranza nucleoni, anche per la grande instabilità dei mesoni π) e il numero totale di particelle penetranti registrate negli sciami. Dalle esperienze di COCCONI e coll.⁽⁴⁾, con contatori, è possibile concludere che il rapporto suddetto vale circa 0,3. Recentemente SITTE⁽⁵⁾ ha trovato per A il valore di 0,2, ma una stima della probabilità di osservare col suo apparato una interazione nucleare porta a ritenere ancora corretto per A il valore di 0,3. Ci serviremo di questo dato nella discussione che seguirà⁽⁶⁾.

Un altro dato è possibile ricavare dalle esperienze, e precisamente il rapporto R tra il numero totale delle particelle penetranti negli sciami estesi e il numero di elettroni. I risultati concordano sul valore 0,02-0,03 per detto rapporto R (a profondità tra 700 e 1000 g/cm²).

(*) Attualmente presso il Palmer Physical Laboratory - Princeton, New Jersey.

(¹) G. SALVINI e G. TAGLIAFERRI: *Phys. Rev.*, **75**, 1112 (1949).

(²) J. ISE Jr. e W. B. FRETTER: *Phys. Rev.*, **76**, 933 (1949).

(³) A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI e G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **6**, 207 e 291 (1949).

(⁴) G. COCCONI, V. TONGIORGI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **75**, 1063 (1949); **76**, 1020 (1949).

(⁵) K. SITTE: *Phys. Rev.*, **78**, 721 (1950).

(⁶) Lavori di K. GREISEN e coll., in corso di pubblicazione, eseguiti con criteri analoghi a quelli di SITTE, sembrano dare per A il valore 0,4. Comunicazione privata.

Riunendo i due risultati sopra ricordati si può concludere che negli sciami estesi, anche nella bassa atmosfera, è presente un notevole (e piuttosto inatteso) numero di neutroni e protoni. I risultati stessi indicano chiaramente che la componente nucleonica si sviluppa nell'aria in una sorta di cascata nucleare, cosicché i nucleoni non sono solo assorbiti, ma anche creati nelle esplosioni nucleari. Si può concludere anche che gli sciami estesi non rappresentano un particolare fenomeno della radiazione cosmica, ma sono la manifestazione nell'aria della moltiplicazione dei primari (protoni e nuclei) di maggiore energia.

Questo sviluppo in cascata è già stato studiato da diversi autori sia nella ipotesi detta di produzione plurima di mesoni (7-10), sia nell'ipotesi di produzione multipla (11-13). Un tentativo di interpretare alcuni aspetti degli sciami estesi seguendo questi concetti fu già fatto da noi e riportato in brevi comunicazioni (14-15).

Nella prima nota SALVINI ha fatto uso della ipotesi della produzione multipla secondo OPPENHEIMER (nelle rappresentazioni di WATAGHIN e HEISENBERG le difficoltà sono le stesse, ma più gravi), assumendo un cammino libero medio dei mesoni π dell'ordine di 300 g/cm^2 . Dopo le esperienze del gruppo di Bristol noi sappiamo ora che tale valore è troppo elevato e sembra doversi ammettere che la sezione d'urto di interazione nucleare dei mesoni π non è lontana dalla sezione geometrica del nucleo. La possibilità di interpretare gli sciami estesi con le teorie multiple dipende dalla natura di questa interazione ancora sconosciuta e per la quale non vi sono ipotesi. Se dovessimo ammettere che i mesoni π di alta energia danno luogo, nell'urto con i nuclei, a interazioni dello stesso tipo di quelle nucleone-nucleone previste dalla teoria di OPPENHEIMER, permane la difficoltà fondamentale che si incontra con questo tipo di teoria e che consiste nella troppo forte degradazione dell'energia da un urto al successivo, cosicché la componente capace di dare esplosioni nucleari resta rapidamente estinta a bassa quota, contrariamente a quanto ci mostra l'esperienza. In disaccordo sarebbe anche la dipendenza dalla quota degli sciami estesi, come sono rivelati dalla componente elettromagnetica, dipendenza che risulterebbe troppo forte se la componente molle si considera originata dalla disintegrazione dei neutretti in fotoni.

Queste difficoltà si attenuerebbero se si ammettesse che nell'urto nucleone-nucleone o in quello mesone-mesone, una frazione non piccola dell'energia rimanga alle particelle preesistenti all'urto, e quindi venga ridotta in conformità la molteplicità di produzione dei mesoni. Questa modificazione, che attualmente non ha alcun fondamento teorico, porterebbe allo sviluppo in cascata gli stessi vantaggi che ritroviamo adottando l'ipotesi della produzione singola.

In quest'ultima ipotesi è possibile invece andare più lontano nella trattazione matematica e ottenere una rappresentazione dello sciamo non in contrasto con l'esperienza. Eventuali riserve sulla validità di detta ipotesi alle altissime energie (e quindi nei primi stadi di sviluppo dello sciamo) provengono dalle osservazioni di stelle in lastre; non direttamente dalle esperienze sugli sciami estesi.

(7) L. JANOSY e W. HEITLER: *Proc. Phys. Soc.*, **62 A**, 374 e 669 (1949).

(8) P. CALDIROLA: *Nuovo Cimento*, **6**, 565 (1949).

(9) E. CLEMENTEL: *Nuovo Cimento*, **7**, 109 (1950).

(10) P. BUDINI e N. DALLAPORTA: *Nuovo Cimento*, **7**, 230 (1950).

(11) H. W. LEWIS, J. R. OPPENHEIMER e S. A. WOUTHUYSEN: *Phys. Rev.*, **73**, 127 (1948).

(12) G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **74**, 975 (1948).

(13) W. HEISENBERG: *Nature*, **164**, 65 (1949).

(14) G. SALVINI: *Nuovo Cimento*, **6**, 300 (1949).

(15) A. BORSELLINO e G. SALVINI: *Suppl. al Nuovo Cimento*, 475 (1949).

Sulla traccia del citato lavoro di JANOSSY e HEITLER⁽⁷⁾ abbiamo studiato una soluzione delle equazioni di diffusione dei nucleoni e mesoni corrispondente alla formazione di uno sciamo singolo generato da un nucleone di alta energia. Abbiamo tenuto conto dei nucleoni di rinculo, ora essenziali nel nostro caso, introducendo lo stesso tipo di funzioni per rappresentare la sezione d'urto nucleone-nucleone in funzione della perdita di energia. Precisamente con $w(\varepsilon, E) d\varepsilon dX$ abbiamo indicato la probabilità che nello strato dX di materia omogenea un nucleone di energia E perda in un urto un'energia compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$. Abbiamo indicato inoltre con $v(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon'$ la probabilità che l'energia ε persa nell'urto si ripartisca in modo che la parte ε' vada al nucleone di rinculo e la parte $\varepsilon - \varepsilon'$ al mesone. Supponendo che i mesoni π non producano a loro volta nucleoni, lo spettro differenziale $S(E, X)$ dei nucleoni si ottiene dalla

$$(1) \quad \frac{\partial S(E, X)}{\partial X} = -S(E, X) \int_0^E w(\varepsilon, E) d\varepsilon + \\ + \int_E^\infty S(E', X) w(E' - E, E') dE' + \int_E^\infty S(E', X) dE' \int_E^{E'} w(\varepsilon, E') v(E, \varepsilon) d\varepsilon.$$

Per quanto riguarda la ripartizione dell'energia persa in un urto, abbiamo esaminato il caso della ripartizione con continuità dell'energia fra il mesone creato e il nucleone di rinculo:

$$a) \quad v(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' = (r + 1)(\varepsilon'/\varepsilon)^r d\varepsilon'/\varepsilon, \quad \text{con } r \geq -1$$

e il caso in cui detta ripartizione avvenga in un rapporto fisso k :

$$b) \quad v(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' = \delta(\varepsilon' - k\varepsilon) d\varepsilon', \quad \delta(x) \text{ funzione di Dirac.}$$

Differenti modi di ripartirsi dell'energia persa si hanno per diversi valori di r o k . La soluzione corrispondente ad uno sciamo singolo, generato da un nucleone primario di energia E_0 , si ottiene con la condizione iniziale $S(E, 0) = \delta(E - E_0)$. Se supponiamo con JANOSSY e HEITLER che $w(\varepsilon, E)$ è funzione del solo rapporto ε/E (in analogia alla sezione d'urto d'irraggiamento elettromagnetico), allora la soluzione può essere ottenuta facilmente introducendo la trasformata di Mellin di $S(E, X)$ e invertendo poi la trasformata stessa col metodo del punto di sella. Per il confronto con l'esperienza interessa di più lo spettro integrale di nucleoni (cioè il numero di nucleoni alla profondità X con energia maggiore di E), che così risulta:

$$(2) \quad \Sigma(E, X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{\exp(-\lambda_{s+1} X)}{\sqrt{-\lambda_{s+1}'' X^{s^2} + 1}},$$

con

$$X = \frac{\log(E_0/E) - \frac{1}{s}}{\lambda'_{s+1}}.$$

Il numero di nucleoni dipende dal parametro s attraverso la funzione λ_s

$$(3) \quad \lambda_s = a - W_s - \Phi_s = \int_0^1 w(z) dz - \int_0^1 (1-z)^{s+1} w(z) dz - m_s \int_0^1 z^{s-1} w(z) dz,$$

dove m_s vale $(r+1)/(r+s)$ nel caso a) e vale k^{s-1} nel caso b). In modo analogo si esprime lo spettro integrale dei mesoni $\mathfrak{N}(E, X)$.

Per i calcoli numerici abbiamo assunto ancora per $w(z)$ lo stesso tipo di funzione $\alpha(1-z)^\beta$ adottato da J.-H. Noi quindi abbiamo a nostra disposizione i parametri α , β e r oppure k . Certamente il loro numero è piuttosto alto e il confronto con l'esperienza potrebbe apparire privo di senso. Tuttavia ci proponiamo di vedere se è possibile descrivere i risultati sugli sciami estesi con valori che già soddisfano ad altri risultati sperimentali.

I valori di α e β si possono ottenere seguendo J.-H., con la condizione che la sezione d'urto totale per collisione nucleone-nucleone sia quella geometrica (che ci dà la condizione $\alpha/(\beta+1) = 6 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2 \cdot N = 3,6 \cdot 10^{-2}$ (con N numero di nucleoni per grammo) e assumendo con J.-H. per β il valore 2, mediante il quale è possibile descrivere in modo soddisfacente l'andamento della componente nucleonica totale attraverso l'atmosfera. Otteniamo così per α il valore 0,11.

Assunti questi valori di α e β , abbiamo calcolato numericamente gli spettri integrali di nucleoni e mesoni in funzione della profondità, per un tipico valore del rapporto E_0/E e per diversi valori del parametro k . Per E_0/E abbiamo assunto il valore 10^4 , che si riferisce a nucleoni e mesoni di energia $10^9 \div 10^{10} \text{ eV}$ in sciami di energia iniziale $10^{13} \div 10^{14} \text{ eV}$. Sono questi gli sciami più frequenti per dispositivi di contatori del tipo di quelli usati nelle misure riportate. D'altra parte allo stadio attuale, calcoli di questo tipo devono considerarsi come puramente indicativi. Dal valore di k dipende sia il rapporto A che il rapporto R considerati all'inizio. I calcoli sono stati fatti dando a k i valori $1/4, 1/2, 3/4$.

Con le nostre ipotesi il rapporto A risulta dato da:

$$(4) \quad A = \frac{\Sigma(E, X)}{\Sigma(E, X) + \frac{2}{3} \mathfrak{N}(E, X)}.$$

Alla quota di 700 g/cm^2 , alla quale le esperienze citate sono state fatte, in corrispondenza ai tre valori di k suddetti, si ottengono per A i valori 0,10; 0,15; 0,30.

Se confrontiamo questi valori con il valore 0,3 riportato all'inizio, e tenendo conto che un terzo dei mesoni prodotti sono neutri (dato ormai confermato sperimentalmente dal gruppo di Bristol) troviamo che un valore di k prossimo a $3/4$ si accorda con l'esperienza. Dal calcolo risulta che il valore di A varia rapidamente con la quota. Non conosciamo sino ad ora dati sperimentali su questa dipendenza, che permetterebbe utilissime indicazioni nei confronti della teoria.

Il numero degli elettroni risultanti a diverse quote richiede una valutazione accurata ed è particolarmente sensibile alle ipotesi fatte sulla produzione di mesoni. Una stima grossolana degli elettroni presenti alla profondità X in uno sciamone generato da un primario di energia E_0 , dà come risultato:

$$(5) \quad \Pi(E_0, X) = \frac{1}{3} \frac{E_0}{E_c} \lambda_2 \exp(-\lambda_2 X)$$

che dà come valore della traccia elettronica totale il valore $1/3(E_0/E_c)$, dove E_c è l'energia persa da un elettrone per ionizzazione nell'unità di cammino. Questo risultato dipende dal fatto che, per le ipotesi fatte, $1/3$ dell'energia del primario va alla componente elettromagnetica e viene dissipata per ionizzazione dagli elettroni. Poichè nella (5) compare solo il rapporto E_0/E_c , si capisce come per un fissato valore di k e della profondità X , si può ottenere un numero di elettroni notevolmente grande e quindi si può dar ragione del valore sperimentale di R . Essendo la valutazione sopra indicata troppo grossolana, non tentiamo un esame più preciso della dipendenza della componente elettromagnetica dalla quota. Rileviamo soltanto come tale dipendenza sia più facilmente interpretabile con la teoria della produzione singola.

In tutta la discussione che precede noi ci siamo riferiti alle teorie della produzione multipla e singola di mesoni nelle loro forme estreme. Nel discutere in particolare l'ultima teoria non abbiamo preso in considerazione la produzione successiva di nucleoni e mesoni da parte di mesoni π . Se si attribuisce ai mesoni un cammino di interazione nucleare dello stesso ordine di quello dei nucleoni, si vede che la probabilità di interazione non è piccola e il loro contributo tende ad abbassare il valore di k e aumentare la componente elettromagnetica dello sciamo.

In conclusione le conoscenze attuali sugli sciami estesi appaiono essere meglio interpretabili con la teoria della produzione singola di JANOSY e HEITLER, che tuttavia deve ritenersi insufficiente per spiegare la produzione dei mesoni ad energie molto elevate. L'energia e le modalità in cui deve eventualmente presentarsi la « saldatura » delle due teorie non sono attualmente precisabili. Tuttavia dalla presente nota appare la possibilità di interpretare la struttura degli sciami estesi nel quadro delle attuali ipotesi sull'urto nucleone-nucleone. A tutt'oggi essi non costringono criticamente ad alcuna ipotesi nuova, né di nuove particelle né di nuove teorie.

Ringraziamo il dott. BERTOLINI per l'aiuto prestatoci nelle valutazioni numeriche.

NOTE DI LABORATORIO

Alimentatore stabilizzato per tensioni da 600 a 1800 V.

R. RICAMO

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto il 19 Giugno 1950)

Riassunto. — La nota riferisce un nuovo impiego della valvola 6AC7 in un alimentatore stabilizzato per tensioni da 600 a 1800 V.

Si segnala la possibilità di realizzare un alimentatore stabilizzato per tensioni da 600 a 1800 V con caratteristiche *notevolmente migliori* di quelle ottenibili con gli schemi usuali ⁽¹⁾ in cui la valvola di regolazione agisce come carico variabile a reazione negativa.

Un alimentatore stabilizzato come quello qui proposto è adatto per l'alimentazione dei fotomoltiplicatori nei contatori a scintillazione e dei contatori proporzionali, rivelatori che generalmente sono seguiti da amplificatori molto sensibili.

Lo schema qui illustrato deriva da quelli per tensioni di 200 \div 300 V con varie modifiche. Esso non è sostanzialmente diverso da quello che altri autori ⁽²⁾ hanno già adoperato per il medesimo scopo. La possibilità di attuare il mio schema sta nelle caratteristiche particolari della valvola 6AC7 anche per

tensioni di 2000 V, se opportunamente collegata. Ho potuto infatti constatare che tale valvola nel montaggio a tetrodo (T_1 della fig. 1 con G_2 unita a G_3) con l'eccezionale tensione anodica di 2000 V ha le seguenti caratteristiche:

$$g = 1 \text{ mA/V}, \quad \mu = 180, \quad \rho = 0,3 \text{ M}\Omega.$$

L'amplificatore differenziale in cui la valvola 6AC7 funziona da pentodo (T_2 di fig. 1) ha un guadagno $G = 150$, mentre la frazione della tensione di uscita che agisce sulla G_1 di T_2 varia da 1/7 a 1/21. In base a questi dati si possono calcolare teoricamente i valori del fattore di stabilizzazione S , del fattore α di riduzione del ronzio e della impedenza di uscita R_0 , ottenibili per l'alimentatore stabilizzato e si trova un ottimo accordo con l'esperienza.

Le caratteristiche praticamente constatate negli alimentatori realizzati secondo lo schema di fig. 1 si possono così riassumere:

$$S = 200, \quad \alpha = 10^{-3}, \quad R_0 = 200 \Omega;$$

tensione efficace di ronzio di 20 mV per tensione di uscita di 1000 V con carico di 2 mA; 7 mA a vuoto.

⁽¹⁾ W. ELMOR e M. SANDS: *Electronics Experimental Techniques* (McGraw Hill, 1949), p. 382.

⁽²⁾ F. V. HANT e R. W. HICKERMANN: *Rev. Scient. Instr.*, **10**, 6 (1939); H. V. NEHER e W. H. PICKERING: *Rev. Scient. Instr.*, **10**, 53 (1939); H. I. LINDERHOVUS e H. RINIA: *Rev. Tech. Philips*, **6**, 54 (1941); P. KOONTZ e D. LATUSH: *Electronics*, n. 7, 119 (1947).

Per quanto riguarda la stabilità di funzionamento dell'alimentatore si segnala che nei primi 10 minuti dall'accensione la variazione relativa della tensione uscente per tensione di alimentazione costante è di 10^{-3} al minuto, dopo di che si hanno lente fluttuazioni dell'ordine di $10^{-4}/\text{m}$, sempre nel medesimo

ottenibile mediante la regolazione del potenziometro P . In tal modo, oltre ad una maggior finezza nella regolazione della tensione uscente si ha una protezione dell'utilizzatore.

L'alimentazione dello schermo di T_2 , fatta con la tensione non stabilizzata, migliora il fattore di stabilizzazione,

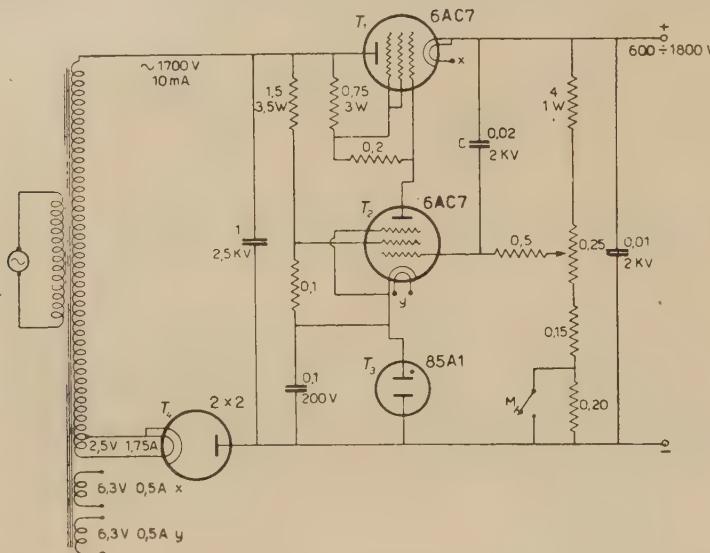


Fig. 1. - Alimentatore stabilizzato da 600 a 1800 V. Capacità in μF , resistenze in $\text{M}\Omega$ (se non altrimenti indicato, dissipazione 1W).

senso, nel tempo di qualche minuto, con escursione massima inferiore a 1% nel tempo di qualche ora.

Tali risultati sono stati confermati recentemente dall'impiego ininterrotto per 300 ore di funzionamento del dispositivo qui illustrato, come alimentatore di un fotomoltiplicatore per la rivelazione di neutroni con cristalli di antracene in misure di sezioni d'urto totali eseguite all'Istituto di fisica del Politecnico di Zurigo (3).

L'interruttore M ha lo scopo di limitare il valore massimo della tensione

mentre l'accoppiamento della griglia di T_2 , tramite C , all'uscita dell'alimentatore porta ad una notevole riduzione del ronzio. Entrambi i dispositivi funzionano infatti da reazione negativa nei riguardi delle variazioni della tensione uscente.

L'alimentatore può fornire, se ben costruito, tensioni sia positive che negative rispetto a terra. Ovvie precauzioni sono l'isolamento accurato per la tensione massima di tutte le parti dell'alimentatore e in particolare di tutti i secondari del trasformatore per l'accensione delle valvole.

Le valvole 6AC7 vanno collaudate prima dell'uso nell'alimentatore. L'esperienza fatta su 15 valvole di diversa fabbricazione ha mostrato che praticamente

(3) R. RICAMO, W. ZÜNTI, E. BALDINGER e P. HUBER: *Helv. Phys. Acta*, **23**, in corso di stampa (1950).

tutte sono efficienti e presentano sufficiente isolamento a 2000 V di tensione anodica con 100 V alla G_2 nel montaggio a pentodo (G_3 al catodo) e con 500 V a $G_2 + G_3$ nel montaggio a tetrodo. Soltanto 9 su 15 si sono però mostrate utilizzabili come triodi ($G_2 + G_3$ con-

nesse all'anodo). Per la sicurezza di funzionamento occorre scegliere solo quelle valvole che risultano efficienti in un collaudo fatto con quest'ultimo montaggio, malgrado che nell'impiego effettivo esse siano notevolmente meno sollecitate.

SUMMARY

The note relates a new employment of tube 6AC7 in a stabilized feeder for voltages from 600 to 1800 V.

PROPOSTE E DISCUSSIONI

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Attività dell'Unione Internazionale di Fisica Pura e Applicata.

E. PERUCCA

Istituto di Fisica del Politecnico - Torino

(ricevuto il 21 Agosto 1950)

1. — Introduzione.

Il prof. I. DE BOER, Segretario della Commissione Simboli, Unità, Nomenclatura (S.U.N.) dell'Unione Internazionale di Fisica Pura ed Applicata (U.I.P.P.A.), ha richiesto ai Membri di detta Commissione, e quindi anche a chi scrive, il loro parere su talune proposte che, se approvate, verrebbero presentate al Comitato Esecutivo (¹) dell'U.I.P.P.A. che ne curerebbe la pubblicazione nei periodici scientifici sotto forma di « Raccomandazioni » agli studiosi.

Nel passato, in casi analoghi, io, raccogliendo i pareri degli eminenti colleghi italiani e valendomene in equa sintesi, avevo potuto dare alla Commissione S.U.N. risposte, cui siffatta procedura conferiva particolare autorità.

Questa volta l'imminenza di taluni termini (²) mi ha costretto ad una risposta immediata ed individuale. Tornato in sede dopo una non breve assenza dall'Italia, voglio rimediare agli incon-

(¹) Di questo Comitato fa parte il prof. E. AMALDI di Roma.

(²) Ad una comunicazione in data 28 Giugno 1950, giunta a me il 3 Luglio, avrei dovuto far pervenire le risposte alla Segreteria della S.U.N. prima del 17 luglio 1950.

venienti di questo procedimento troppo sommario e personale, e chiedo perciò ospitalità al *Nuovo Cimento* per il questionario che segue e per alcune considerazioni di commento.

2. — Questionario.

1) È desiderabile introdurre il termine *monobaro* per ciò che spesso è detto « isotopo »?

2) Quale delle notazioni (per es.: per il litio di massa atomica 6) ${}^6_3\text{Li}$ (*notazione parallela sinistra*), ${}^6_3\text{Li}$ (*notazione parallela destra*), ${}^6_3\text{Li}$ (*notazione diagonale*) si reputa preferibile?

3) È stato proposto di utilizzare anche lettere in « rondo fantasia » (A, B, E, F, H, J, L, M, R, S...) al fine di migliorare ed ampliare la tabella 1948 dei simboli per le grandezze fisiche, suggerita dall'U.I.P.P.A. (³). È opportuno? Per quale gruppo di grandezze fisiche?

4) Premesso che, in seguito alle deliberazioni prese dall'U.I.P.P.A. (Amsterdam, 1948) ed accolte poco dopo dal Comité International des Poids et Me-

(³) U.I.P.P.A., Doc. S.U.N. 49, 1º Aprile 1949. Riprodotta in *Ric. Scient.*, 19, 1400 (1949); *Nuovo Cimento*, 6, 409 (1949).

sures (C.I.P.M.), il sistema (m, kg, s, A_{ass})⁽⁴⁾ è stato riconosciuto come sistema di misurazione per i rapporti internazionali e sono in sviluppo presso le singole nazioni le operazioni necessarie perchè tale sistema di misurazione abbia sanzione legale⁽⁵⁾, quale è il vostro punto di vista riguardo alla razionalizzazione?

3. — Osservazioni.

I commenti che seguono contengono anche il mio parere sui vari quesiti del questionario.

3-1. — I. DE BOER, esprimendosi in favore del termine *monobar* (proposto da A. PÉRARD), suggerisce in conclusione che:

isotopi si dica di atomi di diverso numero di massa ed egual numero atomico;
isobari si dica di atomi di egual numero di massa e diverso numero atomico;
monobaro si dica di sostanza i cui atomi hanno tutti lo stesso numero atomico e lo stesso numero di massa⁽⁶⁾.

Ebbene: a me non pare che, con questo significato, il nuovo termine sia molto indovinato. Basta pensare che, come si conia « monobar », può omo-

(4) L'ampere è definito così: ampere è l'intensità di corrente elettrica costante che, mantenuta in due conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e distanti tra loro 1 m, nel vuoto, produce tra tali conduttori una forza eguale a $2 \cdot 10^{-7}$ newton su ogni metro della loro lunghezza (1 newton = 10^5 dine = 1 joule/m). L'ampere così definito coincide dunque con l'ampere assoluto (e perciò si è scritto A_{ass}) e cioè coincide con 1/10 dell'unità (CGS)_{em} di intensità di corrente elettrica.

(5) Ved. in particolare per l'Italia: Circ. n. 1, 9 Gennaio 1950, prot. n. 420167, Ministero Industria e Commercio.

(6) Non credo di aver alterata l'idea del prof. DE BOER sebbene il testo a me pervenuto risenta di alcuni evidenti trascorsi dattilografici.

logamente coniarsi « monotopo » e con altrettanta ragione venirne proposto l'uso col significato attribuito a monobar. Anzi, nelle discussioni tenute in seno al C.I.P.M. nel 1948 per stabilire se fosse matura la determinazione della lunghezza del metro primario in funzione della lunghezza d'onda di una sostanza che fosse costituita da un solo isotopo, il termine « monotopo » fu già ripetutamente utilizzato.

Io credo che siano molto più chiari e quindi preferibili i due termini seguenti: *nucleide*⁽⁷⁾ si dica di specie di atomo caratterizzato dalla costituzione del suo nucleo, quindi dal suo numero di massa e dal suo numero atomico.

Es.: $^{52}_{24}\text{Cr}$, $^{54}_{24}\text{Cr}$, $^{54}_{26}\text{Fe}$ sono tre nuclidi diversi;

mononuclide⁽⁸⁾ (sostantivo od aggettivo) si dica di sostanza i cui atomi sono tutti nuclidi eguali, cioè i cui nuclei hanno tutti egual numero di massa ed egual numero atomico.

3-2. — L'U.I.P.P.A. aveva raccomandato precedentemente (1948) la notazione parallela sinistra (es.: ^7_3Li). Contro di essa R. FLEISCHMANN ha sollevato alcune obiezioni, cui corrispondono i seguenti vantaggi della notazione diagonale (es.: ^7_3Li):

— è già normalizzata dal 1947 ed in largo uso in U.S.A.;

— è più chiara nella composizione a stampa perchè permette di usare indici ed apici di « corpo tipografico » maggiore;

— è più chiara nelle tabelle ove i simboli di molti nuclei siano raccolti in colonna;

— può scriversi a macchina senza far retrocedere il carrello;

— corrisponde meglio all'ordine di

(7) T. P. KOHMAN: *Am. Journ. of Phys.*, 5, 356 (1947).

(8) F. DEMICHELIS: *Nuovo Cimento*, 6, 397 (1949).

lettura; nessuno dice, per es., « 7-3-litio », mentre si dice « litio - 7 » e può anche giustificarsi l'anteposizione del 3 perché si suole dire: elemento 3 - litio - 7.

Non ho nessun titolo per interloquire in questo campo della fisica, lascio quindi ad altri, in particolare al nostro Collega che è nel Comitato Esecutivo dell'U.I.P.P.A., il compito di valutare questi argomenti; vorrei però osservare che con la notazione parallela sinistra resta posto per indicare il grado di ionizzazione dell'atomo nel modo oggi universalmente seguito (in alto a destra).

Su questo argomento della notazione dei singoli nuclidi, mi sovviene una non lontana e molto brillante conferenza di L. ROLLA. Silasci, egli diceva, che con « litio », « ferro », « calcio », « ossigeno », il chimico continui ad indicare quegli elementi che ottiene dalla natura; essi sono di regola miscele di isotopi sempre in proporzioni costanti entro gli errori sperimentali, se si toglie qualche caso raro e primo tra tutti quello del Pb che fu così secondo di risultati. Ormai ad indicare un isotopo separato dagli altri (un nuclide) basta la notazione puramente numerica (es.: $^{(7)}_3$ per il Litio $^{(7)}_3$ Li); il nome non ha più interesse o, se si vuole, i nomi antichi si riserbino alle miscele naturali di isotopi.

3-3. — L'uso di simboli in carattere « rondo fantasia » (corsivo o tondo secondo le convenzioni stabilite per gli altri tipi di caratteri) mi sembra molto opportuno perché offrirà nuove ampie possibilità ad una simboleggiatura unificata internazionale per le grandezze fisiche.

Incidentalmente dirò che, nel mio trattato di Fisica, io ho già largamente fatto uso del rondo, riservandolo ai simboli di un gruppo di grandezze energetiche ed al gruppo delle grandezze magnetiche, prendendo in ciò lo spunto da quanto era già stato fatto precedentemente da altri autori.

3-4. — Le discussioni riaccesesi dopo la deliberazione del C.I.P.M. del 1948,

riguardano non soltanto la razionalizzazione, ma anche il voler stabilire se col sistema di misurazioni raccomandate da tale Ente si sia sancito un sistema di misurazioni per l'elettromagnetismo (e la meccanica) a tre od a quattro unità fondamentali.

Sono stato dapprima tentato di riferire e commentare varie osservazioni esposte in recenti scritti a me pervenuti su questi due argomenti: sistema a tre od a quattro unità fondamentali, razionalizzazione o non razionalizzazione.

Mi sono subito accorto che avrei abusato della ospitalità del *Nuovo Cimento* e, credo, con poco frutto.

Ecco, quindi, solo alcune di queste osservazioni, già sufficientemente significative.

— La definizione dell'ampere (⁴) data dal C.I.P.M. non permette di stabilire se l'ampere così definito è unità di un sistema a tre od a quattro unità fondamentali. Questo fatto non può essere trascurato, perché non si può separare la questione delle relazioni dimensionali delle unità dalla questione dei concetti fisici. Il sistema dei concetti fisici, cioè la scelta del numero di metodi di misurazione e delle grandezze fondamentali decide in modo definitivo delle relazioni funzionali fisiche (equazioni di definizione tra grandezze fisiche). Queste equazioni sono nell'elettrodinamica molto diverse secondo che si basino su tre o su quattro grandezze fondamentali.

— Secondo vari autori di trattati moderni una descrizione soddisfacente dei fenomeni elettromagnetici richiede la introduzione di una quarta unità fondamentale di natura elettrica.

— Il sistema con le seguenti quattro unità fondamentali: cm, g, s ed una unità elettrica definita in modo che la costante dielettrica del vuoto ϵ_0 assuma valore numerico 1, è il sistema di unità (CGS)_{es}.

Il sistema con le seguenti quattro unità fondamentali: cm, g, s ed una unità elettrica definita in modo che la costante

magnetica del vuoto μ_0 assuma valore numerico 1, è il sistema di unità (CGS)_{em}.

— La razionalizzazione va considerata come un cambiamento nella definizione di talune grandezze fisiche. Le unità non sono cambiate da una siffatta razionalizzazione.

— Il problema della razionalizzazione è un problema puramente geometrico.

— La razionalizzazione deve essere totale.

— La trasformazione non razionale \Rightarrow razionale può effettuarsi in diversi modi. Sono interessanti i due modi seguenti:

eseguire la razionalizzazione sulle unità senza mutare l'introduzione (? definizione?) delle grandezze fisiche, come fu proposto da HEAVISIDE,

introdurre grandezze razionali e non razionali e si fa la trasformazione tra le grandezze senza mutare le unità, come fu proposto da GIORGI.

— Si dovrebbe fissare una sola specie di unità elettriche che misurano le grandezze definite razionali e non razionali, capaci di possedere un valore numerico diverso.

— Si raccomanda l'introduzione delle grandezze razionali che permettono anche di scrivere in forma razionale le equazioni tra grandezze.

— La definizione (4) dell'ampere data dal C.I.P.M., risulta riferita ad una misura assoluta in cui la permeabilità del vuoto sia espressa da $4\pi \cdot 10^{-7}$.

Ma la discussione su affermazioni di questo genere non avrebbe potuto essere breve. Essa avrebbe condotto su di un terreno malsicuro, un po' perchè molte di queste asserzioni sono state tratte da testi ove l'autore non ha potuto scrivere nella propria lingua con tutte le conseguenze che si immaginano, un po' perchè quasi tutte sono vere o false secondo le premesse che l'Autore ha sottinteso.

Infine simile discussione non avrebbe

giovato gran che ai fini che l'U.I.P.P.A. si prefigge.

E allora nei seguenti nn. 4, 5, 6 mi limito ad esprimere il mio parere sul sistema a tre od a quattro unità fondamentali e sulla razionalizzazione.

4. — L'ampere definito dal C.I.P.M. fa parte di un sistema a tre od a quattro unità fondamentali?

Accettata tale definizione di ampere, e l'ampere così definito è quello assoluto (A_{ass}), il sistema m, kg, s, A_{ass} : è a tre unità fondamentali se, qualora si mutasse l'ammontare di talune delle unità m o kg o s (e quindi il newton) l'ampere dovesse di conseguenza mutare;

è a quattro unità fondamentali se, qualora taluna di queste unità meccaniche si variasse nel futuro, la definizione di ampere continuasse a far uso delle unità meccaniche di oggi (9).

Anche se si considerasse giusto il primo di questi due casi, il sistema potrebbe tuttavia conservare tutte e quattro le unità m, kg, s, A_{ass} come unità di riferimento dimensionale (10) cioè nelle

(9) La stessa questione si ritrova in un caso molto più semplice: il litro (volume di 1 kg di acqua, ecc.);

è unità derivata se, qualora in avvenire si mutasse l'ammontare del kg, il litro mutasse di conseguenza,

è unità fondamentale se, dopo tale mutamento, continuasse ad essere definito mediante il kg di oggi.

(10) Il numero delle unità di riferimento dimensionale (E. PERUCCA: *Atti Acc. Sc. Torino*, 79, 38 (1944)) può essere superiore al numero delle unità fondamentali e ciò evita delle equidimensionalità fastidiose; in questo senso mi sembra che debbano intendersi (e limitarsi) i vantaggi di un sistema «a quattro» rispetto ad un sistema «a tre».

Anche questa volta chiediamo alla meccanica qualche esempio ben più semplice di quelli tratti dall'elettromagnetismo.

La portata specifica p in volume di un corso d'acqua, in corrispondenza di un elemento dS di sezione trasversale è: $p = dv/(dt \cdot dS)$, ove dv è il volume di acqua che attraversa ortogonalmente dS nel tempo dt .

equazioni di dimensione si conserverà A_{ass} e non lo si eliminerà sostituendolo con le unità da cui deriva secondo la definizione.

5. - Il sistema (m, kg s, A_{ass})razion.

Dato lo scopo dei corsi che svolgo e del trattato che ho scritto, premetto che non me la sento di insegnare la meccanica cominciando dall'energia o dalla quantità di moto, né la termologia cominciando dall'entropia, né l'ottica cominciando dal principio di Huygens, né l'elettromagnetismo cominciando dalla resistenza elettrica o dalle equazioni di Maxwell, o dalla legge di Neumann-Felici. Non riesco, insomma, ad abbandonare nelle grandi linee il procedimento storico che una ben lunga esperienza mi ha dimostrato il più adatto ad essere compreso e messo a frutto nella mente dei giovani. Perciò io vedo l'introduzione di un sistema (m, kg, s, A_{ass})razion. nel modo seguente (11).

I fenomeni fondamentali, dai quali si prendono le mosse per una trattazione dell'elettromagnetismo e per scrivere le equazioni fondamentali sono ancor quelli consueti delle trattazioni classiche. Ma le equazioni fondamentali si scriveranno,

È quindi

$$[p] = \frac{[l^3]}{[t][l^2]} = \frac{[l]}{[t]} = [u] ;$$

in particolare nel sistema m, kg, s è $[p] = \text{m/s}$.

La portata specifica «è» una velocità. Ma si conservi come grandezza di riferimento dimensionale anche l'area S , quindi non si faccia uso della relazione $[S] = [l^2]$ che deriva l'area dalla lunghezza, relazione che tuttavia non si ripudia. La riduzione precedente delle dimensioni non sarà più possibile e la portata specifica sarà un «volume riferito all'unità di tempo e di area» e nulla di meno. La chiarificazione dei concetti ne guadagna certamente.

(11) Questa trattazione è l'omologa, razionalizzata, di quella seguita da me per il sistema (m, kg, s, A_{ass})non raz (v. E. PERUCCA, *Fisica*, 6^a edizione, vol. II, § 200, Utet, Torino, 1949).

in forma schematica e sufficiente ai nostri scopi:

$$(1) \quad f = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mu_0} \frac{m m'}{r^2} ;$$

$$(2) \quad f = \frac{1}{4\mu} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} ;$$

$$(3) \quad i = \frac{q}{t} ;$$

$$(4) \quad f = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\gamma_0} \frac{m i l}{r^2} .$$

f forza

r distanza

t tempo

q, q' masse elettriche

m, m' masse magnetiche

i intensità di corrente elettrica

μ_0 costante magnetica (del vuoto)

ϵ_0 costante dielettrica (del vuoto)

γ_0 costante elettromagnetica.

La successione delle ulteriori equazioni fondamentali tra loro indipendenti si svolge senza difficoltà: ogni nuova equazione definisce una nuova grandezza fisica; in particolare si avrà

$$D = \epsilon_0(E + J), \quad B = \mu_0(H + I),$$

ove J, I sono le intensità di polarizzazione rispettivamente elettrica e magnetica nei mezzi ponderabili; D, E, H, B hanno i significati consueti.

Si dedurranno allora le equazioni di Maxwell nella forma:

$$(5) \quad \gamma_0 \operatorname{rot} \mathbf{H} = K \mathbf{E} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ;$$

$$(6) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ;$$

con

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho ;$$

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} .$$

ϵ, μ costanti dielettrica, magnetica relative
 ρ densità elettrica di volume
 w densità di volume dell'energia eletromagnetica.

Le (1) \div (4) comprendono, oltre grandezze meccaniche precedentemente definite, sei nuove grandezze elettromagnetiche, tre delle quali $(\epsilon_0, \mu_0, \gamma_0)$ hanno carattere di costanti universali.

Due delle sei grandezze non possono quindi venire definite dalle (1) \div (4) ed hanno carattere di nuove grandezze fondamentali; la loro misurazione dovrà compiersi con metodo diretto. In tutti i sistemi di misurazione che non fanno uso delle unità elettriche internazionali, si sono scelte come nuove grandezze fondamentali elettromagnetiche due di quelle cui si riferiscono dette tre costanti universali; trattandosi di costanti universali il loro valore numerico potrà fissarsi a piacere perchè, essendo da considerare come grandezze fisiche fondamentali, le loro unità di misurazione possono essere stabilite a nostro arbitrio.

Si stabilirà di scegliere come grandezze fondamentali le due costanti universali μ_0, γ_0 .

La terza costante non può più essere indipendente; dalle (1) \div (4) si ricava, come di consueto,

$$(7) \quad \frac{\gamma_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c,$$

c , velocità della luce nel vuoto.

Si fissano le unità di μ_0 e γ_0 nel modo seguente:

I) Si sceglie l'unità $[\mu_0]_{\text{MKSA raz.}}$ di μ_0 in modo che il valore numerico della permeabilità magnetica sia $4\pi \cdot 10^{-7}$.

II) Si sceglie l'unità $[\gamma_0]_{\text{MKSA raz.}}$ di γ_0 in modo che il valore numerico di questa costante sia 1.

Viene così definito in modo univoco dalle equazioni fondamentali di definizione, (1) \div (4) e con le convenzioni arbitrarie I), II), un sistema di misu-

razioni coerente, che è il sistema Giorgi razionalizzato, comprendente l'ampere, l'ohm, il volt, l'henry assoluti.

Lascio ad altri lo stabilire quante delle asserzioni del n. 3, (3-4) siano applicabili a questo sistema.

Procedendo come ho detto, si vede che effettivamente ogni sistema di misurazioni meccanico-elettrico ha cinque e non quattro unità fondamentali, cioè arbitrarie.

Nei classici sistemi assoluti CGS, queste unità furono scelte in modo da dare valore 1 a due delle tre costanti $\epsilon_0, \mu_0, \gamma_0$; dopo di che esse furono trattate come coefficienti numerici unitari ed ignorate dai più (ma non da tutti, vedansi, per es., i vecchi trattati di DUHEM, di M. ABRAHAM).

Nei sistemi Giorgi si rivela μ_0 , ma si continua ad applicare a γ_0 quello stesso procedimento di disparizione che tanto si è rimproverato nei riguardi di μ_0 .

In quanto poi al significato della razionalizzazione, anche questa volta è opportuno avere presente un'analogia nel campo della meccanica.

Ricordiamo che le equazioni fondamentali di questa sono:

$$(8) \quad S = l^2;$$

$$(9) \quad v = l^3;$$

$$(10) \quad \alpha = \frac{l}{r};$$

$$(11) \quad r = l;$$

$$(12) \quad u = \frac{l}{t};$$

$$(13) \quad a_c = \frac{u}{t};$$

$$(14) \quad f = m \cdot a_c;$$

$$(15) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} m u^2;$$

.....

<i>l</i> ,	lunghezza
<i>S</i> ,	area
<i>v</i> ,	volume
<i>t</i> ,	tempo
<i>u</i> ,	velocità
<i>a_c</i> ,	accelerazione
<i>m</i> ,	massa
<i>f</i> ,	forza
\mathcal{E} ,	energia cinetica
α ,	angolo piano
<i>r</i> ,	raggio di cerchio.

La successione delle ulteriori equazioni fondamentali, tra loro indipendenti, si svolge senza difficoltà, ogni nuova equazione definisce una nuova grandezza fisica.

Le (8) \div (15) sono otto equazioni con undici grandezze fisiche; la meccanica richiede tre grandezze e unità fondamentali.

Nella (15) si introduce il fattore numerico $1/2$ perché *fa comodo*, altrimenti nel teorema delle forze vive apparirebbe un fattore numerico 2 che disturba.

Ebbene le (1), (2), (4) vengono infiorate di 4π (sono... razionalizzate) perché *fa comodo*; si vuole infatti che tale fattore non appaia più in talune formule dell'elettromagnetismo (prima tra tutte la relazione di Ampère tra circuitazione di \mathbf{H} e intensità di corrente concatenata) e ciò fa molto comodo agli elettrotecnicici.

Il valore numerico di μ_0 è stabilito in $4\pi \cdot 10^{-7}$ perché *fa comodo*: con questo valore di μ_0 e usando le unità meccaniche m , kg , s , le (1) \div (4) conducono all'ampere e quindi al volt, al faraday, ecc.

L'aver introdotto i fattori numerici 4π nelle (1), (2), (4) ha mutato le equazioni fondamentali di definizione dell'elettromagnetismo?

Io direi di *sì*; e direi che risultano anche mutate le unità di misura delle grandezze che, in conseguenza delle (1), (2), (4), divengono « razionalizzate ».

Ma direi che possiamo autorizzarci ad usare lo stesso nome per le grandezze fisiche omologhe razionalizzate o no. P. es. μ_0 definito nel sistema Giorgi

non razionalizzato ($\mu_0 = 10^{-7}[\mu_0]_{\text{non raz.}}$) o nel sistema Giorgi razionalizzato ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}[\mu_0]_{\text{raz.}}$) si chiamino entrambe permeabilità magnetica e si dica che sono le stesse grandezze fisiche.

Qualora ciò portasse a confusione nel periodo di coabitazione dei due sistemi razionalizzato e non razionalizzato, si parli di costante magnetica razionalizzata e costante magnetica non razionalizzata, di $[\mu_0]_{\text{raz.}}$ e $[\mu_0]_{\text{non raz.}}$, ecc.

Nel considerare e, magari, confutare queste opinioni che, secondo le asserzioni riportate al n. 3 (3-4) non sembra siano condivise da tutti, io prego di non perdere di vista il caso analogo e molto più semplice dell'energia cinetica:

Se l'energia cinetica si definisce come $\mathcal{E}' = mu^2$ (e così fu fatto oltre un secolo fa), si riterrebbe mutato il suo concetto fisico? Si riterrebbe mutata l'equazione di definizione dell'energia cinetica? Ne sarebbe mutata l'unità di misura? Dovrebbe mutarsene il nome?

Io credo che le due equazioni di definizione si debbano considerare diverse; si potrebbero tuttavia chiamare « energia cinetica » sia $\mathcal{E} = (1/2)mu^2$, sia $\mathcal{E}' = mu^2$ sebbene diversamente definite (per un fattore numerico!).

Non sarebbero mutate le dimensioni dell'energia cinetica perché sia \mathcal{E} sia \mathcal{E}' avrebbero dimensioni $[l^2mt^{-2}]$. Nel sistema MKSA le corrispondenti unità di energia cinetica avrebbero entrambe diritto di indicarsi con $kg \cdot (m^2/s^2)$ (come l'unità di velocità si indica con m/s , ma qui tutto va liscio); ci troveremmo con due unità di misura di ammontare diverso (nel rapporto di 1 a 2) e tuttavia indicate con la stessa abbreviazione.

Analogamente il sistema (m, kg , s , A)_{razion.} fondato sulle (1) \div (4), I, II), ed il sistema Giorgi non razionalizzato fondato sulle (1) \div (4), I, II), ove si cancellino tutti i 4π , danno origine a due sistemi di unità di misura ove unità razionalizzate e non razionalizzate delle omologhe grandezze fisiche sono indicate con le stesse abbreviazioni anche se

sono di ammontare diverso (es.: amp/m per H).

6. - Razionalizzare?

E veniamo infine a ciò che sembra interessi di più agli effetti del questionario dell'U.I.P.P.A.

Conviene accogliere come sistema di misurazioni a carattere internazionale il sistema (m, kg, s, A_{ass})_{non raz.} o il sistema (m, kg, s, A_{ass})_{razion.} che io intendo individuato come ho indicato nel n. 5?

Certamente non sono il solo tra i fisici ad avere considerato e considerare la questione della razionalizzazione del sistema Giorgi come una questione priva di contenuto concettuale scientifico. Come per il fattore $1/2$ dell'energia cinetica, si tratta di *comodità*. Ora, a detta di moltissimi eletrotecnicici, il sistema razionalizzato è più comodo. Non oserei dire che è più comodo per i fisici. Ma, di fronte alla vivace campagna di quegli eletrotecnicici, la grande massa dei fisici oppone il disinteresse più evidente.

Questo disinteresse può essere giustificato. In fin dei conti i fisici che ci hanno preceduti hanno fatto tante belle cose quando non c'erano sistemi di misurazione, quando c'erano i sistemi CGS, quando c'era il sistema pratico ibrido. I fisici di domani proseguiranno i loro studi con pari lena e con pari possibilità anche se useranno un sistema razionalizzato.

Non credo che, non razionalizzati ed impregnati di sistemi « a tre » per colpa di GAUSS, sia loro sfuggita qualche bella

avventura nel mondo della ricerca e questa sarà carpita facilmente grazie al sistema « a quattro » razionalizzato.

Al gruppo numeroso di eletrotecnicici entusiasti per la razionalizzazione, perchè essa semplifica qualche delle formule che più spesso hanno in uso, vorrei ricordare che il problema va visto sotto l'aspetto generale e non soltanto sotto quello che li riguarda.

Molti fautori della razionalizzazione sono gli stessi che qualche anno fa erano i sostenitori dell'ohm internazionale aducendo non ultimo argomento la necessità di modificare le tabelle di taratura dei loro campioni se si fosse tornati all'ohm assoluto. Infatti ogni mutamento di unità di misura ha riflessi pratici che turbano e non possono essere ignorati. Occorre una buona contropartita perchè il mutamento sia accolto. Solo così possiamo giustificare la persistenza dell'atmosfera, del mm_{Hg} , del m_{H_2O} , del chilogrammo-peso, del cavallo-vapore, del sistema inglese, e così via.

Ebbene: si è pensato, ad es., quale patrimonio costituisca il complesso dei dati raccolti da un secolo sul campo magnetico terrestre, dati espressi tutti nel sistema (CGS)_{em} e per i quali è immediato il conguaglio nel sistema (m, kg, s, A_{ass})_{non razion.}, non così nel sistema razionalizzato?

Si è pensato all'analogo poderoso corredo di dati sulle suscettività elettrica e magnetica delle varie sostanze, i quali vengono anch'essi alterati dalla razionalizzazione?

ERRATA-CORRIGE

C. FRANZINETTI: On nuclear disintegrations underground, 7, 384, (1950).

In the fourth sentence from the beginning of the above paper, instead of:

« suggest for the cross section the value $\sim 10^{-30} \text{ cm}^2$ »
read: « suggest for the cross section the value $\sim 10^{-29} \text{ cm}^2$ ».

and also read formula (1b) as follows:

$$\sigma dW = 4.2 \cdot 10^{-31} \frac{dW}{W} \left(1 - \frac{W}{\mathcal{E}} + \frac{W^2}{2\mathcal{E}^2} \right).$$

E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: Contributo allo studio degli sciami estesi - I, 7, 401 (1950).

ERRATA

CORRIGE

pag. 413 - fig. 3:	$\log_{10} \frac{Q}{h} \text{ e } \log_{10} \frac{Q_3 + Q_4}{h}$	$\log_{10} (P_a - P_{a+3}) \text{ e } \log_{10} P_{a+3}$
» 417 - form. (7) e (8):	$\exp \left[-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sqrt{x^2}} \right]$	$\exp \left[-\frac{1}{2} \frac{r^2}{x^2} \right]$
» 421 - form. (17), seconda:	$\int_0^{\infty} g(K) dK$	$\int_{1.2 \text{ MeV}}^{\infty} g(K) dK$
» 421 - riga 8:	2,55	2,25
» 426 - riga 14:	$E_p(E, r)$	$Ep(E, r)$
» 426 - » 17:	$E_p(E, 0)$	$Ep(E, 0)$
» 426 - form. (25):	aggiungere la condizione $y_e = y_{\gamma} + \frac{1}{2s}$	
» 436 - riga 5:	$t = a; t = 4,8; t = 9,6$	$t = 4,8 \text{ } t_a = 13$
» 437 - form. (45):	cost. E	cost.
» 442 - sestultima riga:	scambiare le parole:	« piene » e « tratteggiate »
» 449 - riga 27:	$5,18 \cdot 10^3 \frac{dE}{E^{2,6}}$	$5,18 \cdot 10^3 \frac{dE_p}{E_p^{2,6}}$
» 449 - form. (69):	$10^3 \frac{dE_p}{E_p^{1,6}}$	$10^3 \frac{dE_p}{E_p^{2,6}}$
» 450 - form. (70): $\begin{cases} 2 \cdot 10^3 \frac{1}{\alpha A_i^{3/2}} \\ 2 \cdot 10^3 \frac{1}{\beta A_i^{1,6}} \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \cdot 10^3 \frac{1}{\alpha A_i^{3/2}} \\ 2 \cdot 10^3 \frac{1}{\alpha' A_i^{1,6}} \end{cases}$
» 452 - quartultima riga:	$E_p(E, r)$	$Ep(E, r)$

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Direttore responsabile: G. POLVANI

Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 21-IX-1950

IL
NUOVO CIMENTO
ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VII, N. 5-bis

Serie nona

15 Ottobre 1950

**Metodo per la determinazione della diffusività termica
dei cattivi conduttori del calore.**

L. MATTAROLO

Istituto di Fisica Tecnica e Centro di studi per le Applicazioni del Freddo - Padova

(ricevuto il 10 Luglio 1950)

Riassunto. — Viene esaminata la possibilità di determinare la diffusività termica dei materiali isolanti e semiconduttori mediante un nuovo metodo, consistente nel misurare la velocità di raffreddamento o di riscaldamento in corpi di forma geometrica semplice (sfera o cubi), nei quali alle condizioni ai limiti fisse, generalmente considerate, si siano sostituite condizioni ai limiti variabili col tempo. È dato cenno di alcuni risultati sperimentali.

La conoscenza della diffusività termica o conducibilità della temperatura $a = \lambda/c\gamma$ dei materiali, oltre essere necessaria per lo studio della trasmissione del calore in regime variabile, può costituire il mezzo più rapido per il calcolo del coefficiente di conduzione λ , data la relativa facilità ed esattezza con cui possono essere determinati il calore specifico ed il peso specifico.

La determinazione diretta di λ per i cattivi conduttori del calore si affida generalmente a metodi i quali, facendo ricorso a un regime stazionario di flusso, richiedono, specie alle alte temperature, apparecchiature di grande mole e costose, necessarie per ottenere in una certa zona un flusso unidirezionale; tali metodi comportano inoltre la difficoltà di realizzare delle condizioni ai limiti uniformi e costanti.

La ricerca del valore di a , che per definizione consiste in un problema di regime variabile, può essere fatta con maggiore semplicità di costruzione e con notevole risparmio di tempo. Il metodo consiste generalmente nel deter-

minare la velocità di raffreddamento o di riscaldamento di corpi di forma geometrica semplice per i quali sia possibile risolvere in modo esatto la equazione differenziale di Fourier

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Fra gli autori che di tale ricerca si sono occupati si possono ricordare NEUMANN, AYRTON e PERRY, KIRCHHOFF e HANSEMANN, STADLER, Lord KELVIN e MURRAY, WEBER, HECHT, ecc.

Quasi tutti fanno riferimento al metodo primieramente applicato dal NEUMANN ⁽¹⁾, che, in relazione agli sviluppi di questa nota, brevemente esponiamo.

Si consideri una sfera di raggio R , inizialmente a temperatura uniforme T_0 ; all'istante $t = 0$ venga improvvisamente imposta sulla superficie la temperatura T_s . La temperatura di un punto qualunque distante r ($< R$) dal centro, si ottiene allora risolvendo la (1) che in questo caso assume la forma:

$$(2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

La soluzione, tenendo conto delle condizioni ai limiti sopra dette, è:

$$(3) \quad \frac{T - T_0}{T_s - T_0} = 1 - \frac{2R}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \exp \left[- \frac{n^2 \pi^2 a t}{R^2} \right] \sin \frac{n \pi r}{R}.$$

La serie a secondo membro è rapidamente convergente e, per tempi non molto piccoli, può essere limitata al primo termine. Misurando allora la variazione della temperatura di un determinato punto (ad esempio il centro), la pendenza della retta ottenuta riportando in ordinate $\log_e [(T_s - T)/(T_s - T_0)]$ e in ascisse il tempo t , dà modo di determinare immediatamente il coefficiente a .

Nel caso in cui fosse nota, in luogo della temperatura superficiale T_s , la temperatura T_a del mezzo in cui viene posta improvvisamente la sfera, la soluzione della (1) risulta:

$$(4) \quad \frac{T - T_0}{T_a - T_0} = 1 - \frac{2k}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \exp [-a\varphi_n^2 t] \frac{R^2 \varphi_n^2 + (Rk-1)^2}{\varphi_n^2 [R^2 \varphi_n^2 + Rk(Rk-1)]} \sin R\varphi_n \sin r\varphi_n,$$

ove k rappresenta il rapporto h/λ fra il coefficiente di adduzione e la conducibilità termica della sfera, e i valori di φ_n sono le radici dell'equazione

$$R\varphi \cotg R\varphi = 1 - Rk.$$

Ora se ad uno stesso istante è misurata la temperatura del centro della sfera T_c e la temperatura T_r in un punto a distanza r ($< R$) dal centro, si ha

⁽¹⁾ F. NEUMANN: *Ann. de Chimie et Phys.*, **66**, 183 (1862).

per la (4), limitando la sommatoria del secondo membro al solo primo termine:

$$\frac{T_r - T_a}{T_c - T_a} = \frac{\sin r\varphi_n}{r\varphi_n}.$$

Determinato così φ_n , la (4) potrà scriversi per un punto qualunque:

$$\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = N \exp [-a\varphi_n^2 t]$$

e si conclude come sopra a proposito della (3).

Il VERCELLI in una nota del 1913 (2), dopo aver esaminato alcune delle ricerche degli autori citati, ha stabilito, facendo uso delle funzioni ellittiche, una formula che dà, nel primo dei casi sopra esposti, il valore esatto della temperatura al centro, al posto del valore approssimato ricavabile praticamente dalla (3). Il vantaggio derivato dalla formula di VERCELLI è però trascurabile di fronte alle difficoltà pratiche di stabilire le condizioni ai limiti indicate. (VERCELLI si limita a differenze $T - T_s < 10^\circ$). Il metodo che fa ricorso alla (2) o alla formula di Vercelli ci sembra quindi assai limitatamente giovevole. Più largamente può usarsi la (4); ad essa infatti si sono rivolti numerosi ricercatori. (3) Alcune ricerche da noi condotte su materiali da costruzione, facendo ricorso a questa formula, hanno dato risultati assai concordanti. Le prove sono state fatte usando di sfere (e talora di cubi per i quali è ricavabile una espressione assai simile alla (4)) del diametro di cm 10. La sfera veniva riscaldata in un forno fino ad una determinata temperatura uniforme e poi posta a raffreddare in un ambiente a temperatura T_a .

Le cause di errore che si riscontrano in tal modo di procedere sono:

1) Il raffreddamento della sfera può non essere uniforme per moti convettivi dell'aria; si è rimediato ventilando energicamente l'ambiente a temperatura T_a .

2) Se la differenza di temperatura $T_s - T_a$ è elevata, il valore di k è lungi dall'essere costante durante l'esperienza; invero se la ventilazione forzata può rendere il coefficiente di convezione indipendente da $T_s - T_a$, rimane essenzialmente funzione di tale differenza il coefficiente di radiazione che corre nella determinazione di k ; cessa quindi la validità della (4).

In considerazione soprattutto di quest'ultima difficoltà ci siamo domandati allora se non sia possibile usare di un metodo il quale non tenga conto del fenomeno dell'adduzione, e contemporaneamente non esiga una temperatura T_s costante; ossia in altre parole (limitandoci all'esempio della sfera) se non sia possibile, misurando l'andamento della temperatura in un punto qualunque

(2) F. VERCELLI: *Nuovo Cimento*, 6, 427 (1913).

(3) Cfr.: H. S. CARSLAW e J. C. JAEGER: *Conduction of heat in solids* (Oxford, 1948), pag. 204.

della sfera e la conseguente variazione della temperatura nel centro, dedurre il valore della costante cercata.

Giova a tale scopo il seguente teorema del DUHAMEL⁽⁴⁾, facilmente dimostrabile in base alla linearità della equazione di Fourier:

« Se $T = g(x, y, z, t)$ rappresenta la temperatura di un punto $P(x, y, z)$ al tempo t , in un solido nel quale la temperatura iniziale è zero e sulla superficie del quale venga imposta la temperatura $+1^\circ$ (oppure sia $+1^\circ$ la temperatura dell'ambiente nel quale il solido viene improvvisamente immerso), la soluzione del problema quando la temperatura imposta sulla superficie sia $\varphi(t)$ (oppure sia $\varphi(t)$ la temperatura ambiente) è data da:

$$(5) \quad T(t) = - \int_0^t g'_\lambda(x, y, z, \lambda) \varphi(t - \lambda) d\lambda.$$

Riferendoci al caso fin qua considerato della sfera, se $T_s = \varphi(t)$ è la temperatura superficiale, la g è espressa dal secondo membro della (2) e, se il punto P coincide con il centro, essa è funzione soltanto di $(a/R^2)t$. Per una determinata sfera la (5) diviene allora:

$$(6) \quad T(t) = - \int_0^t g'(\lambda) \varphi(t - \lambda) d\lambda.$$

Si potrà pertanto procedere nel modo seguente. Si misurino sperimentalmente i valori della $\varphi(t)$ e della $T(t)$ nei vari istanti in una sfera di dato raggio e si supponga di poter ricavare dalla (6) il valore della g per vari valori di t ; sia per esempio $g = g_1$ per $t = t_1$. Se si dispone del grafico della g , in funzione di $\tau = (a/R^2)t$, unico per tutte le sfere, detto τ_1 il valore dell'ascissa per cui $g = g_1$, è immediatamente $a = (\tau_1/t_1)R^2$.

Si osservi che nel caso specifico della sfera, essendo le isoterme simili alla superficie della sfera, la $\varphi(t)$ può rappresentare, anzichè la temperatura superficiale, la temperatura di un punto qualunque M della sfera; R allora rappresenta la distanza fra M ed il centro.

La difficoltà naturalmente consiste nella soluzione della (6) rispetto a g . Tale equazione, che in analisi è nota sotto il nome di equazione di Volterra di prima specie, viene frequentemente usata, sebbene con significato diverso, nello studio del regime variabile nel riscaldamento delle abitazioni. Ovviamente non si può pensare ad una soluzione analitica, perchè le $T(t)$, $\varphi(t)$ sono date di solito sotto forma grafica. Ecco come può ricavarsi una soluzione approssimata.

Si immagini di dividere l'intervallo $0 \sqsubset t$ in n intervalli parziali $0 \sqsubset t_1$,

(4) Cfr.: H. S. CARSLAW e J. C. JAEGER: op. cit., pag. 19.

$t_1 \sqsupseteq t_2, \dots, t_{n-1} \sqsupseteq t_n$, tutti eguali, in ognuno dei quali la $g(t)$ si possa considerare funzione lineare del tempo

$$(7) \quad g(t) = \alpha_k t + \beta_k.$$

La (6) allora si può scrivere:

$$T(t_n) = - \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(t-\lambda) d\lambda = \sum_{k=1}^n \alpha_k [\Phi(t-t_{k-1}) - \Phi(t-t_k)],$$

avendo indicato con $\Phi(t)$ l'integrale della funzione $\varphi(t)$. Si ha quindi, con $\Phi(0) = 0$:

$$T(t_1) = \alpha_1 \Phi(t_1),$$

$$T(t_2) = \alpha_1 [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)] + \alpha_2 \Phi(t_1),$$

$$T(t_3) = \alpha_1 [\Phi(t_3) - \Phi(t_2)] + \alpha_2 [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)] + \alpha_3 \Phi(t_1),$$

ecc.

Si possono ricavare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ e, per la (7), tenendo conto che $\beta_0 = 0$, determinare i valori $g(t_1), g(t_2), g(t_3)$ cercati. Il problema è quindi risolto.

Nel diagramma (fig. 1) sono segnate le funzioni g relative al centro di una sfera (I), all'asse di un cilindro indefinito (II) e allo strato medio di una parete piana (III) di spessore $2R$ infinitamente estesa.

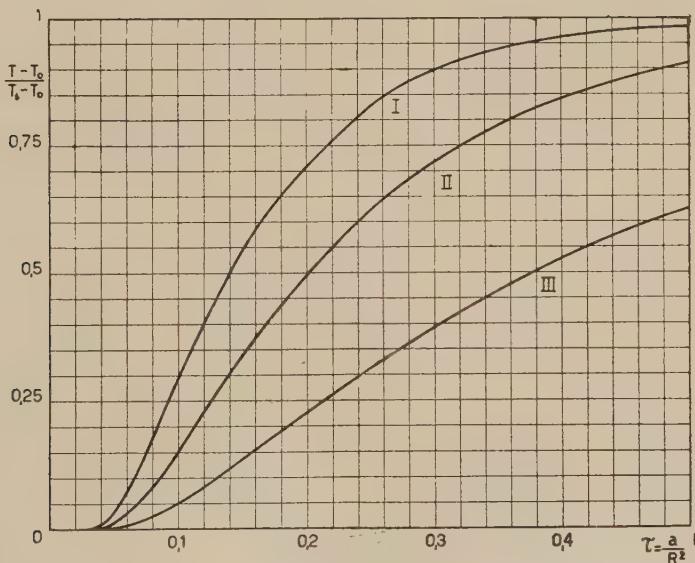


Fig. 1.

allo strato medio di una parete piana (III) di spessore $2R$ infinitamente estesa. Praticamente le ultime due si riferiscono, per valori non molto grandi di $\tau = (a/R^2)t$ anche a modelli finiti quando la lunghezza del cilindro o la esten-

sione della parete sono di altro ordine di grandezza del diametro, rispettivamente dello spessore. Il metodo esposto quindi, limitandosi la esperienza a pochi minuti, può essere usato egualmente bene con qualsiasi di questi tre solidi. È possibile comunque ricavare l'espressione esatta della funzione g anche per corpi finiti, quali un cubo, un parallelepipedo, un cilindro finito.

Prove sinora sono state fatte su sfere e cilindri di gesso e su cilindri e parallelepipedi (mattoni) di materiali refrattari. Il diametro delle sfere era di cm 10; il diametro dei cilindri cm 6 e la loro lunghezza cm 22. La tempe-

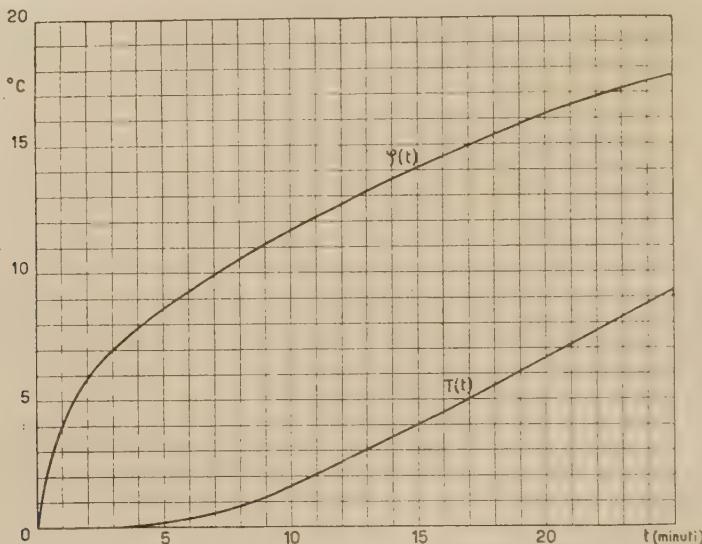


Fig. 2.

ratura era misurata mediante coppie termoelettriche che venivano introdotte, una al centro ed una alla profondità di pochi millimetri dalla superficie, attraverso un canale del diametro di 2 mm successivamente riempito dello stesso materiale in polvere. Il modello poggiava sulle punte di bacchette di vetro.

I risultati di una di queste prove sono riportati nel grafico (fig. 2). $T(t)$ e $\Phi(t)$ rappresentano l'andamento della temperatura rispettivamente al centro e ad un punto M a distanza $R = 4.8$ cm dal centro di una sfera di gesso di cm 5 di raggio, la quale inizialmente a temperatura uniforme $T_0 = 27^\circ$ è stata posta in un frigorifero a temperatura $T = 2^\circ$. (Nelle ordinate sono riportati i valori assoluti delle differenze $T(t) - T_0$ e $\Phi(t) - T_0$). Calcolando graficamente i valori della Φ , si ha, applicando le (8), (7), con $t_k - t_{k-1} = 8$ minuti = 0,133 h:

$$\alpha_1 = 0,855, \quad \alpha_2 = 3,16, \quad \alpha_3 = 1,56,$$

$$g(t_1) = 0,118, \quad g(t_2) = 0,542, \quad g(t_3) = 0,750,$$

donde per la curva I della fig. 1:

$$\tau_1 = 0,069, \quad \tau_2 = 0,148, \quad \tau_3 = 0,215,$$

e quindi per la $\tau = (a/R^2)t$:

$$a = 11,9 \cdot 10^{-4}, \quad a = 12,7 \cdot 10^{-4}, \quad a = 12,3 \cdot 10^{-4} \quad (5).$$

Il valor medio trovato per la diffusività termica coincide con ottima approssimazione con quello che viene riportato nei vari manuali.

Altri risultati ottenuti in una prima serie di misure su materiali da costruzione, anche usando di parallelepipedi, sono stati assai confortevoli; è proposito estendere l'applicazione del metodo in un piano di ricerche sulla conducibilità dei materiali refrattari e dei materiali isolanti, rispettivamente alle alte e alle basse e bassissime temperature.

Conclusioni.

I vantaggi del metodo descritto ci sembra si possano così enumerare:

- 1) L'apparecchiatura necessaria è estremamente semplice.
- 2) La durata dell'esperienza è brevissima.

3) Si utilizza la formula (3) al posto della (4), eliminando anzitutto la imprecisione di cui quest'ultima può soffrire per la variabilità, durante l'esperienza, del coefficiente di adduzione, ed eliminando inoltre la difficoltà di stabilire una T_s costante a partire da un istante dato; che anzi, fissata uniforme la temperatura iniziale del corpo in esame, la T_s può essere misurata in un punto qualunque del corpo a patto che le isoterme siano simili alla superficie del corpo stesso.

Ringrazio il prof. B. DEL NUNZIO per avermi suggerito l'argomento e per l'interesse con cui ha seguito la ricerca.

(5) In unità del sistema tecnico.

SUMMARY

This paper examines the possibility of determining the thermal diffusivity of insulating or semiconducting materials with a new method, consisting in measuring the cooling or heating rates in samples of a simple geometric shape (spheres or cubes), in which boundary conditions are not fixed, as is usually the case, but are substituted by functions of time. Some experimental results are reported.

Contributo allo studio degli sciami estesi - II.

E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI (*) e S. SCIUTI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 19 Luglio 1950)

Riassunto. — In questo lavoro si completa la discussione dei dati sperimentali relativi a misure sugli sciami estesi, a 3500 m s.l.m., descritte in un precedente lavoro (I). Vien presa in esame la moltiplicazione subita localmente dalle particelle dello sciame e si trova un discreto accordo tra le frequenze sperimentali e quelle teoriche. Si mostra poi che la discrepanza (notata in I) tra i valori teorici e quelli sperimentali dell'esponente dello spettro, non è dovuta alla particolare legge di distribuzione impiegata nei calcoli. Infatti i valori teorici di γ risultano troppo poco sensibili, sia al comportamento in vicinanza dell'asse che all'esistenza o meno di una « coda » nella legge di distribuzione parziale, per poter attribuire detta discrepanza alla particolare rappresentazione dello sciame impiegato nei calcoli. Il disaccordo potrebbe esser dovuto invece alla presenza di sciami non ancora nel massimo loro sviluppo.

1. — Introduzione.

In un lavoro precedente (¹) abbiamo descritto un esperimento eseguito al Laboratorio della Testa Grigia in cui gli sciami estesi venivano rivelati a mezzo di quattro camere di ionizzazione rapide in coincidenza tra loro e con quattro mazzi di contatori.

Questo secondo lavoro è un completamento del primo al quale faremo spesso riferimento indicando, per esempio, con I-3 o I-(34) rispettivamente il n. 3 o la equazione (34) di quel lavoro.

(*) Assistente presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Pavia, momentaneamente presso il Centro di Fisica Nucleare con una borsa di studio del C.N.R.

(¹) E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, 7, 401 (1950).

Rimandando ad I per la descrizione dettagliata dell'apparecchio e per le notazioni di cui faremo uso, ci limitiamo a ricordare che lo scopo di questa esperienza era di studiare le proprietà moltiplicative della componente elettronica dello sciame in quanto essa è legata in modo noto e relativamente semplice con lo spettro energetico locale degli elettroni che investono il dispositivo sperimentale. Nel progettare questa esperienza noi siamo stati guidati dall'idea che lo spettro energetico della componente elettronica e quindi le corrispondenti proprietà moltiplicative, potesse essere più sensibile alla struttura dello sciame di quello che non lo sia la densità superficiale delle particelle medesime. È noto infatti che tutte le esperienze eseguite fino ad ora sulla componente elettronica degli sciami estesi sono tali da dare solo informazioni sulla densità superficiale delle particelle e che i loro risultati non sono mai in disaccordo aperto con la teoria a cascata elettronica, come ci si dovrebbe attendere in base ad altri aspetti dello sciame, quale per esempio la presenza di particelle penetranti distribuite quasi uniformemente sull'area coperta dallo sciame medesimo.

In I abbiamo discusso le frequenze degli eventi Q e $(Q + 3) + (Q + 4)$, in funzione della densità superficiale delle particelle misurata a mezzo delle camere di ionizzazione poste sotto strati di Pb di 0; 2,5 e 5 cm di spessore. Per maggior chiarezza ricordiamo che in I-4 si è chiamato

Q una coincidenza quadrupla tra le quattro camere non in coincidenza con i contatori;

$Q + 3 (Q + 4)$ una coincidenza quadrupla tra le quattro camere in coincidenza tripla (quadrupla) con i contatori.

In questo lavoro vogliamo invece discutere quantitativamente il problema a cui si è accennato alla fine di I-3, ossia vogliamo confrontare fra loro le ampiezze degli impulsi nelle quattro camere le quali sono separate l'una dall'altra da 2 mm di ottone e 2 mm di piombo corrispondenti complessivamente a mezza unità di radiazione. Come già si è fatto in I tratteremo il problema supponendo che tutti gli sciami incidano sul nostro apparecchio in direzione verticale o quasi, per modo che nelle camere inferiori (2-3) lo sciame viene osservato ad uno stadio del suo sviluppo un poco più avanzato ($0,5 X_0$) che nelle camere superiori (1-4). Prima di esaminare quantitativamente questo problema vogliamo fare qualche considerazione qualitativa sulla ampiezza degli impulsi nelle quattro camere di ionizzazione e mettere in evidenza il diverso comportamento degli eventi Q rispetto agli eventi $Q + 3$ e $Q + 4$ i quali, a scopo di semplicità, verranno trattati insieme ed indicati complessivamente come $Q + 3-4$.

Fissati due assi cartesiani riportiamo a partire dall'origine O lungo il semi-

asse $1 \rightarrow x$ positivo, $2 \rightarrow y$ positivo, $3 \rightarrow \bar{x}$ negativo, $4 \rightarrow \bar{y}$ negativo, le quantità

$$|\sigma_i| = 100 \frac{A_i}{\sum_1^4 A_i}$$

e tracciamo il punto P tale che

$$(2) \quad P - O = \sum_1^4 \sigma_i.$$

Dato che A_i è l'ampiezza dell'impulso della camera i -esima è chiaro che il punto P coinciderà con l'origine O del diagramma se i quattro impulsi nelle quattro camere sono uguali tra loro e viceversa risulterà tanto più spostato da O quanto più disuguali sono gli impulsi.

Nella fig. 1 diamo i diagrammi così ottenuti e uno schema illustrativo della distribuzione delle ampiezze degli impulsi corrispondenti ai vari ottanti. Si vede così che i punti che cadono negli ottanti 2 e 3 corrispondono ad eventi aventi circa la stessa ampiezza nelle due camere superiori e nelle due inferiori ma che hanno subito una moltiplicazione maggiore di 1 passando dalle prime alle seconde; viceversa se un punto rappresentativo cade in uno degli ottanti 8-1-5-4 significa che l'evento è fortemente asimmetrico rispetto alle due coppie di camere di ionizzazione poste sulla stessa verticale. Tutti i punti che cadono negli ottanti 1-2-3-4 corrispondono ad eventi in cui si è avuta moltiplicazione maggiore di 1; tutti i punti che cadono negli ottanti 5-6-7-8 a eventi in cui è prevalso l'assorbimento.

Dall'esame della fig. 1 risulta subito una marcata differenza fra gli eventi Q e gli eventi $Q + 3-4$; per questi ultimi vi è ancora una notevole differenza fra i casi in cui le camere di ionizzazione erano scoperte (aria) e il caso in cui esse erano sotto uno strato di 2,5 oppure di 5 cm di Pb. In questi due ultimi casi si possono fare due osservazioni: la prima è che la maggior parte degli sciami subisce un sensibile assorbimento nell'attraversare la mezza unità di radiazione interposta tra le camere 1-4 e le camere 2-3, la seconda è che frequentemente si ha una forte asimmetria fra le camere superiori 1 e 4. Nell'aria invece quasi tutti gli sciami hanno la stessa densità di particelle nelle due camere contigue e subiscono nello straterello interposto fra di queste e quelle inferiori una moltiplicazione abbastanza forte. Per gli eventi del tipo Q è assai più frequente una forte dissimmetria fra le due coppie di camere poste sulla stessa verticale e non si nota un netto prevalere dell'assorbimento o della moltiplicazione nello straterello fra le camere superiori e quelle inferiori. La cosa è resa ancora più evidente dall'istogramma della fig. 2a ottenuto dalla fig. 1 contando il numero di punti rappresentativi che cadono nei singoli ottanti.

Allo scopo di mettere in evidenza la frequenza con cui si verifica un deter-

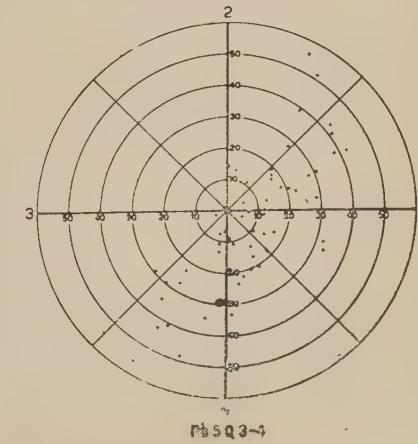
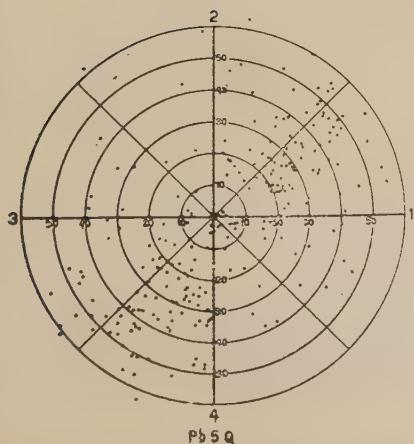
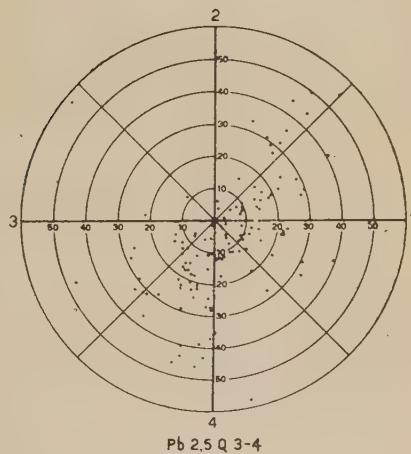
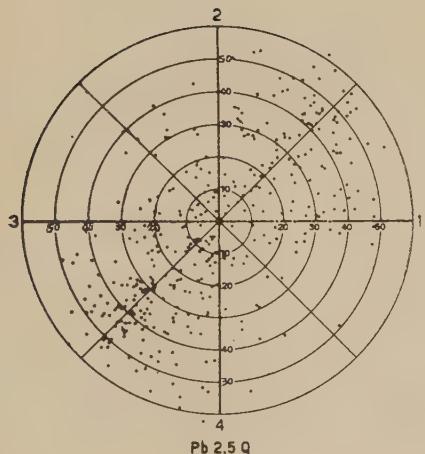
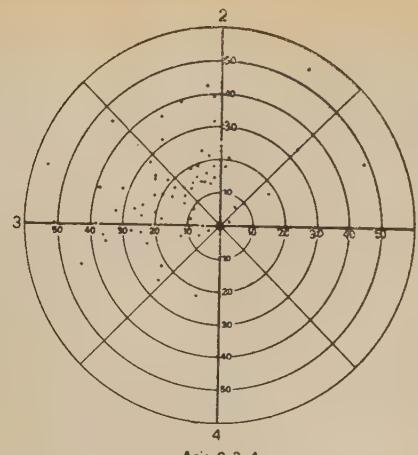
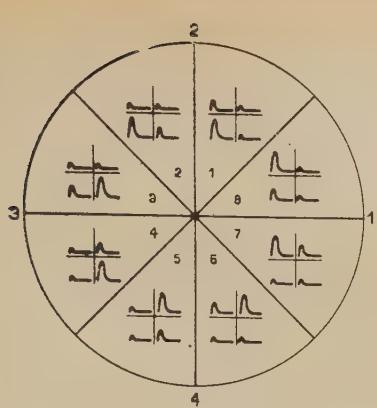


Fig. 1.

minato scarto dalla eguaglianza tra loro degli impulsi nelle quattro camere, abbiamo costruito gli istogrammi della fig. 2b in cui sono riportati i numeri di punti rappresentativi della fig. 1 che cadono fra l'origine e il cerchio corrispondente a $|\sigma_i| = 10$, fra questo e il cerchio corrispondente a $|\sigma_i| = 20$, ecc.

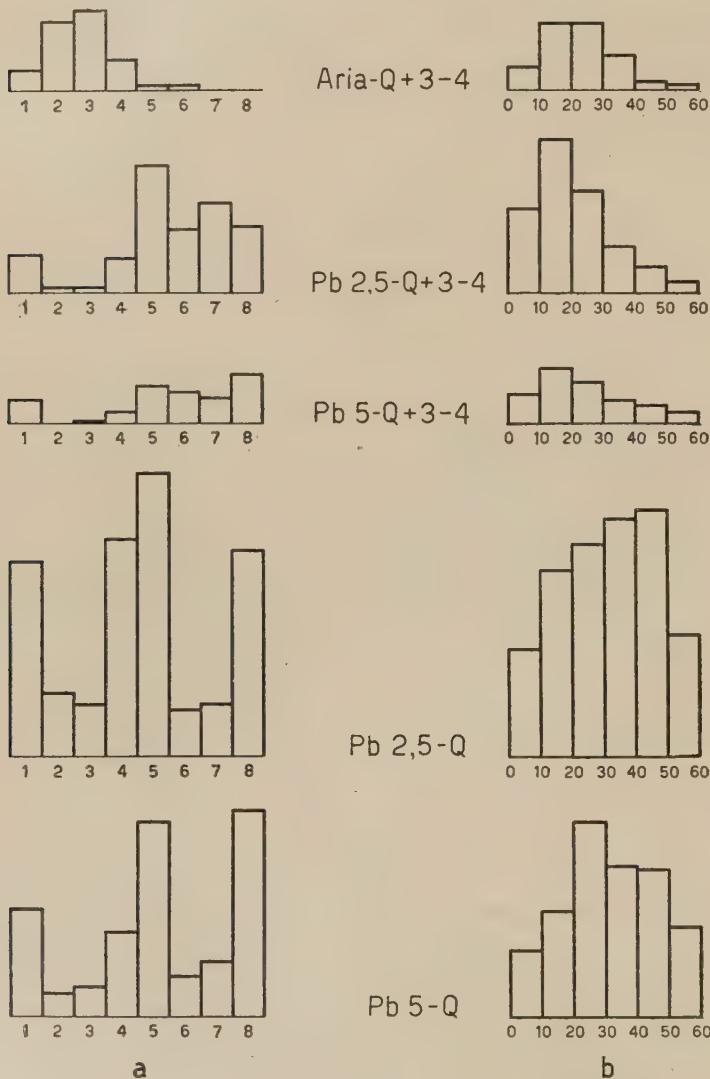


Fig. 2.

Mentre per gli eventi $Q + 3-4$ questi istogrammi mostrano un massimo attorno a $|\sigma_i| = 20 \sim 30$, per gli eventi Q il massimo si sposta verso valori di $|\sigma_i|$ sensibilmente maggiori.

Il diverso comportamento degli eventi Q rispetto agli eventi $Q + 3-4$ quale risulta dagli istogrammi della fig. 2 può sembrare a prima vista una indicazione del fatto che essi sono di natura totalmente diversa. Si deve però tener presente che anche uno sciame esteso di densità così bassa da non azionare i contatori (in media $\Delta < 30$ particelle/m²; vedi I-3) può dar luogo ad un evento del tipo Q quale noi abbiamo effettivamente osservato purchè l'asse dello sciame, ossia la regione ove prevalgono le particelle di elevata energia, passi non lontano dalle camere di ionizzazione.

Nel n. 2 discuteremo quantitativamente la moltiplicazione subita dagli elettroni di uno sciame nel passar dalle camere superiori 1-4 a quelle inferiori 2-3 e nel n. 3 riassumeremo le conclusioni sia di questo lavoro che del precedente riprendendo in esame il tipo di rappresentazione dello sciame esteso a cascata da noi impiegato.

2. - La moltiplicazione subita localmente dalle particelle dello sciame esteso.

Come indice della moltiplicazione che subisce un evento, dovuto a particelle incidenti sull'apparecchio in direzione verticale o quasi, si può prendere il rapporto

$$(3) \quad \beta = \frac{A_2 + A_3}{A_1 + A_4},$$

fra la somma delle ampiezze degli impulsi nelle camere inferiori 2-3 e la somma delle ampiezze degli impulsi delle camere superiori 1-4. I risultati sperimentali con cui dovremo confrontare i nostri calcoli sono rappresentati dagli istogrammi della fig. 3 ove la parte in nero si riferisce a quegli eventi per cui

$$(4) \quad A = \frac{A_1 + A_4}{2} \geq 105 \text{ particelle/camera} \rightarrow 1500 \text{ particelle/m}^2,$$

mentre la parte in bianco si riferisce alla totalità degli eventi da noi osservati. Per quanto dalla fig. 3 non risulti una differenza marcata fra queste due categorie di eventi, noi limiteremo il confronto fra esperienza e teoria agli eventi per cui

$$A > A_t = 105,$$

allo scopo di evitare con sicurezza che le frequenze sperimentali vengano alterate da effetti di discriminazione strumentale come quello discusso in I-3.

Ci proponiamo ora di calcolare le frequenze $P_q(A_t, \beta_0)$ e $P_{q+3}(A_t, \beta_0)$ degli eventi q e $q + 3$ (vedi I-5,5), corrispondenti ad una ampiezza media degli impulsi delle camere 1-4 superiore ad A_t , e ad un fattore di moltiplicazione $\beta \geq \beta_0$.

In un primo momento supponiamo di poter trascurare le fluttuazioni statistiche subite dal numero degli elettroni che emergono dallo strato Δt inter-

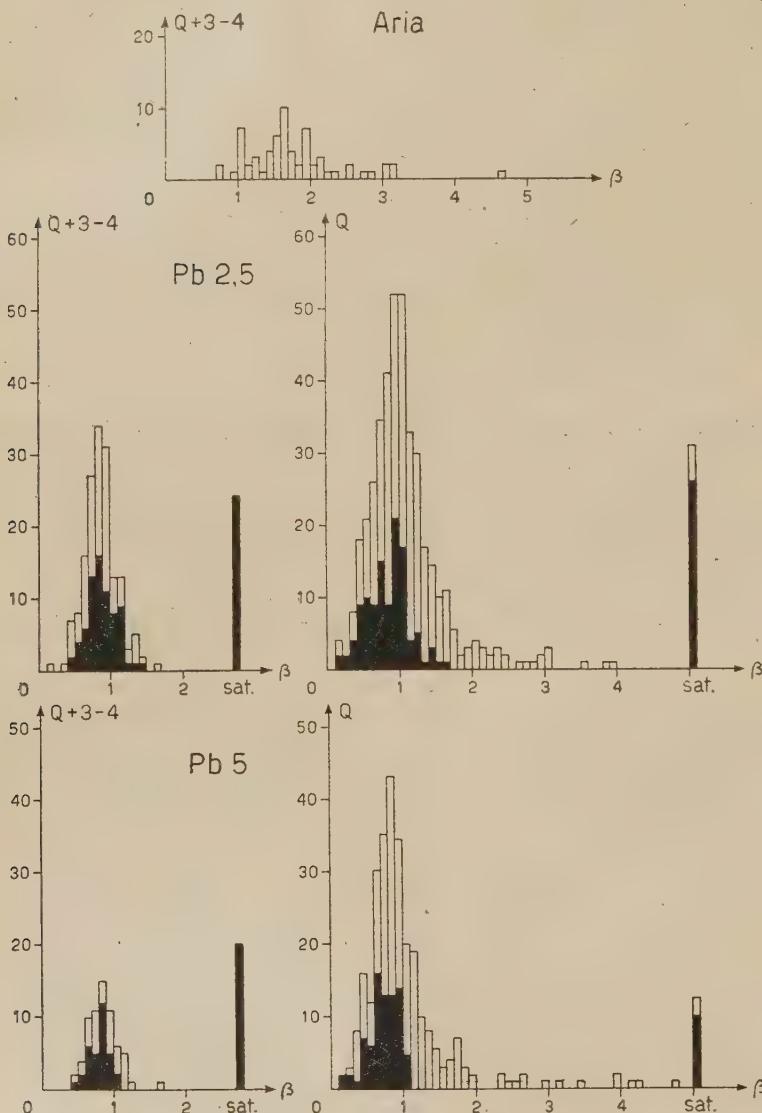


Fig. 3.

posto tra le camere 1-4 e le camere 2-3. Parleremo quindi di un $\bar{\beta}$ il quale per definizione sarà dato dalla espressione

$$(4) \quad \bar{\beta} = \frac{A(t + \Delta t, r)}{A(t, r)}.$$

$A(t, r)$ è l'ampiezza dell'impulso osservato in una camera di ionizzazione posta sotto uno strato di spessore t ; essa è funzione oltre che di t ed r , anche della energia y_p dell'elettrone primario che ha generato lo sciame.

Dato che Δt è piccolo noi potremo anche scrivere

$$(5) \quad \bar{\beta} = 1 + \frac{\partial A(t, r)}{\partial t} \cdot \frac{\Delta t}{A(t, r)},$$

e ricordando la I-(42) e successive, far uso, per distanze r dall'asse dello sciame maggiori delle dimensioni lineari delle camere di ionizzazione l_r , semplicemente della espressione

$$(6) \quad \bar{\beta} = 1 + \frac{\partial N(t, r)}{\partial t} \frac{\Delta t}{N(t, r)}.$$

Per distanze dello stesso ordine di grandezze o inferiori ad l_r , dovremo invece ricorrere alla (5).

Dato che in I abbiamo dato le espressioni valide per $N(t, r)$ in diverse regioni di variabilità di r , è chiaro come si possa procedere facilmente, a mezzo delle (5) e (6), al calcolo di β in funzione di t , y_p ed r .

Per esempio, dalle I-(21) e I-(22) valide per $r \geq r_m = 10^{-2} X_0$ si ha immediatamente

$$(7) \quad \frac{\partial N_e(t, r)}{\partial t} = \Pi(E_p, 0, t) \int_0^\infty p(E, r) \frac{\partial \Pi(E_s, 0, t)}{\partial t} dE.$$

Una analoga espressione si ottiene dalla (I-30) valida per $r_M \leq r \leq r_m = 10^{-2} X_0$. Ossia t compare nella espressione di $N(t, r)$ solo tramite la $\Pi(E_s, 0, t)$; ne segue che in quelle regioni di variabilità di r in cui la $\Pi(E_s, 0, t)$ può essere rappresentata dalla I-(28) si potrà far uso della semplice relazione

$$(8) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \Pi(E_s, 0, t) \left\{ -\frac{1}{2(t-\alpha)} - \frac{1}{2t} - 1 + \sqrt{\frac{y-\beta}{t-\alpha}} \right\},$$

la quale è molto comoda per un rapido calcolo numerico.

Nella fig. 4 riproduciamo per $t_a = 15$ e diversi valori di y_p i corrispondenti valori di $\bar{\beta}$ in funzione di r ottenuti con i procedimenti sopra esposti.

Una volta note queste curve è chiaro come si debba calcolare la frequenza degli eventi che soddisfano alle due condizioni

$$(9) \quad \begin{cases} A \geq A_t, \\ \beta \geq \beta_0. \end{cases}$$

Detto $S(y_p) dy_p$ (vedi I-(55), I-(56), I-(57)) il numero di particelle primarie che incidono per unità di superficie al limite della atmosfera con energia appar-

tenente all'intervallo logaritmico dy_p e direzione nell'angolo solido $\omega = 0,1$ attorno alla verticale, si ha l'espressione analoga alla I-(47)

$$(10) \quad P_q(A_t, \beta_0) = \int S(y_p) \pi r^2 dy_p,$$

dove però per ogni y_p , πr^2 rappresenta ora l'area del cerchio avente il centro sull'asse dello sciame entro cui entrambe le (9) sono soddisfatte.

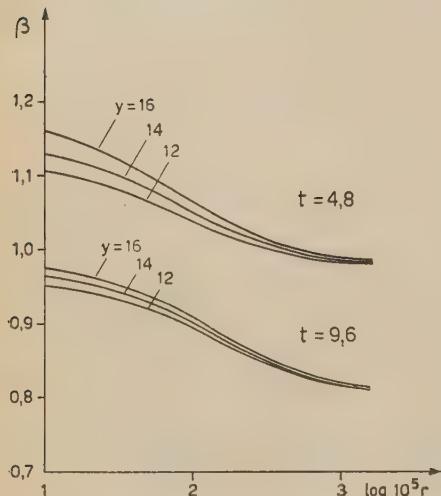


Fig. 4.

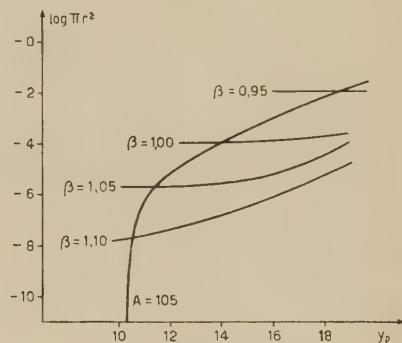


Fig. 5.

Con considerazioni analoghe a quelle che hanno portato alla I-(51) si deduce la $P_{q+3}(A_t, \beta_0)$.

Nella fig. 5 diamo a titolo di esempio per $t = 4.8$ e per gli eventi di tipo q le curve che rappresentano πr^2 in funzione di y_p ; una curva si riferisce alla prima delle due condizioni (9) con $A_t = 105$, mentre le altre si riferiscono a diversi valori di β_0 . Nell'eseguire l'integrale (10) si deve prendere evidentemente per ogni y_p , il minore dei due corrispondenti valori di πr^2 .

Nelle figg. 6 e 7 sono riprodotti per $t = 4.8$ i risultati sperimentali, in forma integrale, corrispondenti ad $A_t = 105$, per gli eventi $q (= Q + Q + 3 \cdot 4)$ e per gli eventi $q + 3 (= Q + 3 \cdot 4)$. Le curve tratteggiate rappresentano le corrispondenti frequenze calcolate in funzione di β con il procedimento sopra descritto.

Le curve teoriche e quelle sperimentali sono normalizzate in modo da racchiudere la stessa area.

Dall'esame di tali figure è evidente che la notevole differenza che intercorre fra queste curve è dovuta, almeno in parte, all'aver trascurato le flut-

tuazioni statistiche che può subire il numero di corpuscoli che emergono dallo strato Δt rispetto al suo valor medio $A(t + \Delta t, r)$.

Si può però tener conto assai facilmente di tali fluttuazioni se si osserva che:

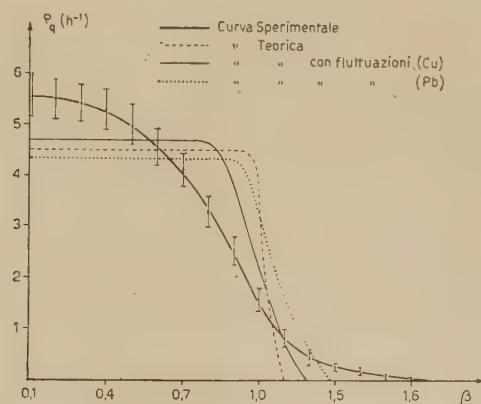


Fig. 6.

1) Per spessori molto piccoli dello strato Δt considerato, il numero di elettroni dovuti ad un primario, sia elettronico che fotonico, fluttua attorno al suo valor medio, con una legge che differisce assai poco da quella di POISSON (2).

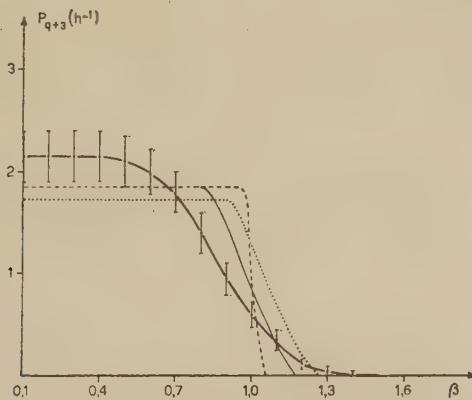


Fig. 7.

2) La somma di più numeri indipendenti ognuno dei quali obbedisce alla legge di Poisson ubbidisce ancora alla legge di Poisson.

(2) N. ARLEY: *On the theory of stochastic processes* (Copenhagen, 1943), cap. VI pag. 151 e 160.

Ne segue che la probabilità che l'ampiezza dell'impulso risulti pari ad a sotto lo strato $t + \Delta t$ essendo $A' = A(t + \Delta r, r)$ il suo valor medio ed $A(t, r)$ il suo valore effettivo a profondità t , è data da

$$(11) \quad w(a) = \exp [-A(t + \Delta t, r)] \frac{[A(t + \Delta t, r)]^a}{a!} = \exp [-A'] \frac{A'^a}{a!},$$

la quale, essendo A' dell'ordine di almeno 100, può essere sostituita con la corrispondente legge normale

$$(12) \quad w(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A'}} \exp \left[-\frac{(a - A')^2}{2A'} \right].$$

D'altra parte essendo $A(t, r)$ fissato, poichè osservato nelle camere di ionizzazione superiori, si può scrivere

$$(13) \quad a = \beta A,$$

e interpretare la (12) come funzione di β .

Ne segue che una volta fissati t , y_p ed r , la probabilità che β abbia un valore maggiore di β_0 è data da

$$(14) \quad W(\beta_0) = \frac{\int_{\beta_0}^{\infty} w(\beta A) d\beta}{\int_0^{\infty} w(\beta A) d\beta}.$$

Un calcolo numerico immediato mostra che $W(\beta_0)$ è così poco sensibile ad y_p da poter esser considerata funzione solo di t ed r . Nella fig. 8 riproduciamo $W(\beta_0)$ per $t = 4,8$ in funzione di β_0 , per vari valori di r .

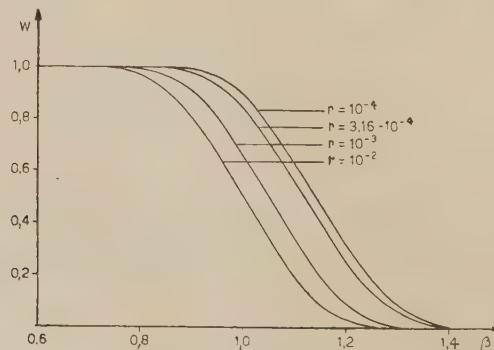


Fig. 8.

Per avere ora la frequenza $P_q(A_t, \beta_0)$ tenendo conto delle fluttuazioni statistiche basta sostituire nella (10) a πr^2 la quantità

$$\overline{\pi r^2} = \int_0^{r^*} W(\beta_0) 2\pi r \, dr,$$

dove $W(\beta_0)$ va pensato come funzione di r tramite le curve della fig. 8 ed r^* è il valore di r definito dalla condizione

$$A(t, r) = A_t = 105.$$

Per piccoli valori di β_0 si ha $W(\beta_0) = 1$ per tutti i valori di r compresi fra 0 ed r^* , per modo che $\overline{\pi r^2}$ si riduce al valore di πr^2 che compete ad $A(t, r) = 105$.

Le curve punteggiate nelle figg. 6 e 7 sono ottenute con questo procedimento.

Il fatto che anche esse differiscano sensibilmente da quelle sperimentali può essere attribuito principalmente a due cause: la prima è che lo straterello del materiale compreso fra le camere 1-4 e le camere 2-3 non è costituito tutto di piombo, come si è supposto tacitamente nel calcolo, ma di 2 mm di piombo e 2 mm di ottone. La seconda consiste nella imperfezione della geometria del dispositivo sperimentale rispetto al calcolo. Questo è stato eseguito nell'ipotesi che gli sciami incidano tutti sull'apparecchio in direzione rigorosamente verticale e che le camere 1-4 registrino tutte le particelle presenti a profondità t e le camere 2-3 tutte quelle presenti a profondità $t + \Delta t$; in pratica invece anche una non grande obliquità dello sciame combinata con la presenza del Pb laterale (I, fig. 1) può dar luogo a deviazioni sensibili dalle sudette condizioni.

Mentre sembra difficile poter tener conto delle reali condizioni geometriche dell'apparecchio, si può assai facilmente valutare l'effetto della non omogeneità del materiale interposto fra le camere. A tale scopo abbiamo ripetuto il calcolo precedente ammettendo che tutto lo strato interposto fosse di ottone. Questa ipotesi è stata introdotta, ripetendo il calcolo delle (5) e (6) e successive, ponendo nelle espressioni delle $\partial A / \partial t$ e $\partial N / \partial t$ invece dell'energia critica del Pb (6,9 MeV) quella dell'ottone (22 MeV). I risultati così ottenuti sono rappresentati nelle figg. 6 e 7 a mezzo delle curve a tratto sottile. Le curve corrispondenti alle nostre condizioni sperimentali dovrebbero essere intermedie fra queste e quelle punteggiate. Come si vede, da tali figure, anche tenendo conto della inomogeneità dello straterello interposto tra le camere, l'accordo fra teoria ed esperienza non è perfetto. La discrepanza è tuttavia abbastanza piccola per poter essere attribuita almeno in gran parte alla imperfezione delle condizioni geometriche. Ci sembra quindi di poter concludere che la moltiplicazione subita localmente dallo sciame è in accordo soddisfacente con le previsioni della teoria a cascata.

3. - Conclusioni.

A conclusione di questo e del precedente lavoro si può dire che sia le frequenze $P_{a+s}(A_t)$ discusse in I-6 che le frequenze $P_{a+s}(A_t, \beta_0)$ discusse nel numero precedente, sono in soddisfacente accordo con le previsioni della teoria a cascata. Ciò non significa naturalmente che gli sciami estesi vadano interpretati semplicemente come sciami a cascata elettronica, ma piuttosto che anche questi fenomeni sono poco sensibili alla struttura dello sciamo. L'accordo è invece un po' meno buono per le frequenze degli eventi $P_a(A, \beta_0)$ e addirittura non buono per le frequenze P_a (vedi I-6) il cui spettro sperimentale corrisponde ad un valore dell'esponente γ sensibilmente maggiore di quello dedotto dai nostri calcoli.

Ci sembra quindi opportuno di prendere in esame questo punto ed aggiungere a quanto si è già detto in I-6,3 qualche altra considerazione a proposito del tipo di rappresentazione da noi impiegato per l'apertura laterale degli sciami estesi.

Per semplificare le nostre considerazioni e presentarle al tempo stesso nella forma più adatta per il confronto con i risultati teorici di MOLIÈRE (3) noi supporremo che gli sciami siano tutti rappresentabili con funzioni di struttura, e indicheremo con $p(E, r) dE dr$ il numero di elettroni aventi energia fra E e $E + dE$ situati a distanza compresa tra r ed $r + dr$ dall'asse dello sciamo. Supporremo naturalmente di avere

$$\int_0^\infty dE \int_0^\infty p(E, r) dr = 1.$$

Una analoga espressione varrà anche per i quanti γ (vedi I). Supponendo di tener fisso E , cominciamo con il ricordare che la $p(E, r)$ è completamente definita, una volta che si conoscano tutti i suoi momenti di ordine pari

$$(15) \quad \bar{x^n} = \int_0^\infty r^n p(E, r) dr,$$

come si riconosce immediatamente considerando la funzione $p^*(E, x)$ della variabile x , definita tra $-\infty$ e $+\infty$, la quale coincide con la $p(E, r)$ per $x = r \geq 0$ e con la $p(E, -r)$ per $x = r \leq 0$. Ora per la p^* sono diversi da zero solo i momenti di ordine pari i quali coincidono con le espressioni (15).

Ne segue che la p^* potrà venire rappresentata, nell'intervallo $-\infty \rightarrow +\infty$,

(3) G. MOLIÈRE: *Kosmische Strahlung* (Ed. W. Heisemberg, Berlino, 1943), Cap III; *Zeits. f. Phys.*, 125, 250 (1949).

e quindi anche la $p(E, r)$ limitatamente all'intervallo $0 \mapsto +\infty$, mediante il noto sviluppo in serie di funzioni di HERMITE (4)

$$(16) \quad p(E, r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2}} \exp \left[-\frac{r^2}{2\bar{x}^2} \right] \left\{ 1 + \frac{K_3}{3!} H_3 \left(\frac{r}{\sqrt{x^2}} \right) + \frac{K_4}{4!} H_4 \left(\frac{r}{\sqrt{x^2}} \right) + \dots \right\},$$

dove

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_3 = \frac{\bar{x}^3}{(\bar{x}^2)^{3/2}} = 0; \quad K_4 = \frac{\bar{x}^4}{(\bar{x}^2)^{4/2}} - 3; \\ K_5 = \frac{\bar{x}^5}{(\bar{x}^2)^{5/2}} - 10 \frac{\bar{x}^3}{(\bar{x}^2)^{3/2}} = 0; \quad K_6 = \frac{\bar{x}^6}{(\bar{x}^2)^{6/2}} - 15 \frac{\bar{x}^4}{(\bar{x}^2)^{4/2}} + 30. \end{array} \right.$$

Qualsiasi funzione di distribuzione avente senso fisico soddisfa certamente le condizioni sufficienti per l'applicabilità di tale sviluppo (5).

Facciamo subito notare che la rappresentazione da noi adottata, ossia l'aver assunto per la $p(E, r)$ la legge gaussiana, significa aver considerato solo il primo termine dello sviluppo in serie (16). Se tale sviluppo convergesse rapidamente si potrebbe pensare di passare facilmente dalla approssimazione zero alle approssimazioni successive una volta noti i primi momenti della distribuzione che si vuol rappresentare. Purtroppo però la (16) converge piuttosto lentamente, come è risultato anche da un tentativo da noi fatto, di introdurre i momenti pari di ordine inferiore al decimo, quali sono stati dati da NORDHEIM, OSBORNE e BLATT sia per la distribuzione di Molière che secondo le loro formule (6). Come vedremo fra poco su di un esempio particolare, il fatto di usare l'approssimazione zero anzichè lo sviluppo in serie completo (16), non può però alterare fortemente i risultati finali, ossia i valori delle $P(t, r)$. Prima di mostrare questo vogliamo però discutere i valori dei momenti di ordine superiore relativi alla distribuzione di Molière e a quella di Nordheim, Osborn e Blatt. Un semplice calcolo numerico mostra che i momenti di ordine 4°, 6°, 8° e 10° di Molière coincidono praticamente con i corrispondenti momenti della legge esponenziale

$$(18) \quad p_{ex}(E, r) = \alpha \frac{E}{E_0} \exp \left[-\alpha \frac{E}{E_0} r \right],$$

i quali sono dati dall'espressione

$$r^n = \frac{n!}{\alpha^n},$$

(4) *Handbuch der Phys.* (Berlino, 1928), III, pag. 449.

(5) J. V. USPENSKY: *Ann. of Math.*, (2) 28, 593 (1927); G. VITALE e G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, II (Bologna, 1935), pag. 240.

(6) L. W. NORDHEIM, L. OSBORNE e J. M. BLATT: *Proc. Echo Lake Cosmic Ray Symposium*, 273 (1949).

pure in essa si prenda $\alpha = 1,4$; il momento del secondo ordine della (18) coinciderebbe invece con quello di MOLIÈRE per $\alpha = 1,55$.

Questo comportamento è una conseguenza prevedibile dell'andamento asintotico della legge di distribuzione degli elettroni o dei fotoni di data energia secondo MOLIÈRE, andamento che è notoriamente esponenziale.

Secondo NORDHEIM e collaboratori la legge di distribuzione di Molière ha però ancora troppo poca coda, ossia l'andamento asintotico della legge di distribuzione degli elettroni decresce più lentamente di un esponenziale.

Chiarito questo punto, vogliamo mettere in evidenza la poca sensibilità dei risultati finali dalla legge di distribuzione assunta per gli elettroni di data energia, con il seguente argomento.

Proponiamoci di calcolare le $P_e(t, r)$ partendo da due diverse leggi di distribuzione: la legge gaussiana

$$(19) \quad p_g(E, r) dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2}} \exp\left[-\frac{r^2}{x^2}\right] dE = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E}{\delta_e} \exp\left[-\frac{E^2 r^2}{\delta_e^2}\right] dE$$

e la legge esponenziale

$$(20) \quad p_{ex}(E, r) = \sqrt{2} \frac{E}{\delta_e} \exp\left[-\sqrt{2} \frac{E}{\delta_e} r\right] dE,$$

aggiustate in modo da corrispondere allo stesso scarto quadratico medio $\bar{x}^2 = \delta_e^2/E^2$: è chiaro che la (20) ha una coda molto maggiore della (19) e che il suo andamento asintotico è del tipo di quello della legge di Molière. Essa ne differisce invece per il suo comportamento in vicinanza dell'origine.

Ciò che si deve calcolare è

$$(21) \quad P_e(t, r) = \int_0^\infty p(E, r) \Pi(E_s, 0, t) dE,$$

che nei due casi (19) e (20) si può porre rispettivamente nella forma

$$(22) \quad P_{e_g}(t, r) = \int_0^\infty \psi(E) \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{E^2 r^2}{\delta_e^2}\right] dE,$$

$$(23) \quad P_{e_{ex}}(t, r) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \psi(E) \exp\left[-\sqrt{2} \frac{E r}{\delta_e}\right] dE,$$

avendo posto

$$(24) \quad \psi(t, E) = p_g(E, 0) \Pi(E_s, 0, t).$$

Ora la (24) si può rappresentare, per E maggiore di un valore E_{\min} convenientemente scelto, a mezzo di una espressione del tipo

$$(25) \quad \psi(t, E) = \sum_i a_i \exp[-\alpha_i y] = \sum a_i E^{-\alpha_i}$$

dove la sommatoria comprende tre o quattro termini e le α_i soddisfano la condizione

$$0 < \alpha_i < 1.$$

Per esempio per $t = 4,8$ si ha

$$y_{\min} = -2, \quad E_{\min} = 0,135, \quad a_1 = 23,3, \quad a_2 = -38,2, \quad a_3 = 15,2, \\ \alpha_1 = 0,4, \quad \alpha_2 = 0,6, \quad \alpha_3 = 0,8.$$

Sostituendo la (25) nelle (22) e (23), si ottiene con alcuni passaggi elementari

$$(26) \quad P_{eg}(t, r) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i \delta_e^{1-\alpha_i}}{2^{(1+\alpha_i)/2}} r^{\alpha_i} \left\{ \left(-\frac{1+\alpha_i}{2} \right)! - \left(-\frac{1+\alpha_i}{2}, \frac{1}{2} \hbar^2 r^2 \right)! \right\},$$

$$(27) \quad P_{eex}(t, r) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 \sqrt{\pi} \frac{a_i \delta_e^{1-\alpha_i}}{2^{(1-\alpha_i)/2}} r^{\alpha_i} \left\{ (-\alpha_i)! - (-\alpha_i, \sqrt{2} \hbar r)! \right\},$$

con

$$h = \frac{E_{\min}}{\delta_e} = \frac{0,135}{0,197} = 0,685.$$

Il confronto fra le (26) e (27) è immediato soprattutto se ci si limita a quei valori di r che interessano per il calcolo delle frequenze studiate in questo lavoro. Questi sono compresi fra $4 \cdot 10^{-4}$ e $4 \cdot 10^{-2} X_0$ (cioè $r \leq 20$ m); ossia sono così piccoli che la funzione gamma incompleta si può rappresentare con la espressione approssimata

$$(x, y)! = \frac{x!}{(x+1)!} y^{x+1} = \frac{y^{x+1}}{x+1}.$$

commettendo così un errore massimo inferiore all'1 %. In questo intervallo di distanze dall'asse si ha quindi

$$(28) \quad \rho_e(t, r) = \frac{P_e(t, r)}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r^2} \sum_{i=1}^3 c_i \varepsilon_i r^{\alpha_i} - \eta \frac{B}{2\pi r},$$

dove

$$(29) \quad c_i = \frac{a_i \delta_e^{1-\alpha_i}}{2^{(1+\alpha_i)/2}} \left(-\frac{1+\alpha_i}{2} \right)!, \quad B = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{E_{\min}^{1-\alpha_i}}{1-\alpha_i},$$

$$(30) \quad \begin{cases} \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{per il caso gaussiano,} \\ \Gamma \left(1 - \frac{\alpha_i}{2} \right) & \text{per il caso esponenziale,} \end{cases} \\ \eta = \begin{cases} 1 & \text{per il caso gaussiano,} \\ \sqrt{\pi} & \text{per il caso esponenziale.} \end{cases} \end{cases}$$

Come si vede da questa espressione l'andamento di $\varphi(t, r)$ risulta assai poco diverso nei due casi considerati, e ciò è tanto più evidente se si osserva che per esempio con i valori di α_i usati per $t = 4,8$ si ha

$$\varepsilon_1 = 0,927, \quad \varepsilon_2 = 0,97, \quad \varepsilon_3 = 1,005.$$

Come abbiamo osservato nel n. 6,3 e nell'appendice 3 di I, il punto essenziale per decidere se il basso valore di γ dedotto in quel lavoro per gli eventi q , è dovuto all'aver usato la legge di distribuzione (19) anzichè una distribuzione dotata di una maggior coda, sta nel confronto dei corrispondenti valori della $d\varphi/dr$. Dalla (28) si deduce

$$(31) \quad \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{\pi r^3} \left\{ \sum_1^3 c_i \varepsilon_i r^{\alpha_i} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2} \right) - \eta \frac{B}{2} r \right\},$$

Un calcolo numerico immediato mostra che nell'intervallo di variabilità di r per cui si può far uso di queste espressioni la quantità

$$-\pi r^3 \frac{d\varphi}{dr}$$

è sempre maggiore per la distribuzione gaussiana che per la distribuzione esponenziale.

Riprendendo l'argomento esposto in I-6,3 e I-appendice 3, si può concludere che

$$\left(\frac{d\varphi}{dA_t} \right)_{\text{nel caso esponenziale}} > \left(\frac{d\varphi}{dA_t} \right)_{\text{nel caso gaussiano}},$$

ossia il valore di γ che si otterrebbe assumendo la distribuzione esponenziale anzichè quella gaussiana sarebbe ancora minore.

In altri termini la discrepanza fra i valori di γ calcolati nel nostro precedente lavoro e quelli osservati non può essere dovuta all'aver fatto uso della distribuzione gaussiana perchè anzi come risulta dall'esempio ora discusso le distribuzioni dotate di una coda maggiore tendono a dare valori di γ ancora minori.

Facciamo notare che questa discussione completa quella data in I-6,1 ove la distribuzione spaziale da noi impiegata è stata confrontata con altre aventi un comportamento sensibilmente diverso in prossimità dell'asse dello sciame.

In conclusione si può asserire che i valori teorici di γ sono troppo poco sensibili sia al comportamento in vicinanza dell'origine che alla esistenza o meno di una coda della legge di distribuzione spaziale, per poter attribuire la discrepanza esistente fra il valore calcolato e quello misurato del γ relativo agli eventi del tipo Q , alla particolare rappresentazione spaziale dello sciame da noi impiegata.

Purtroppo la fenomenologia degli sciami estesi è così complicata e ancor oggi così poco conosciuta che sembra difficile poter trarre da questa osservazione delle conclusioni sicure.

Tuttavia a noi sembra che, se l'effetto è reale, come noi riteniamo, ossia non è dovuto a fluttuazioni statistiche anormali né a un qualche tipo di discriminazione introdotta dal dispositivo sperimentale, la più semplice interpretazione dei nostri risultati vada ricercata nella argomentazione data in I-6,2 sul meccanismo di produzione dello sciame da parte della primaria. Come si è notato nel n. 6,3 un valore di γ sensibilmente più elevato si può ottenere se una buona percentuale degli eventi Q è dovuta a sciami che non hanno ancora raggiunto il loro massimo sviluppo alla quota di 3500 m s.l.m. ove essi vengono osservati. Ora se il meccanismo di generazione dello sciame è quello discusso come seconda ipotesi in I-6,2, in vicinanza dell'asse si fanno sentire soprattutto i corpuscoli generati negli ultimi urti subiti dalla particella primaria, e questi hanno certamente una distribuzione spaziale corrispondente a sciami non ancora completamente sviluppati.

Questo effetto si manifesta maggiormente negli eventi Q che negli eventi $Q + 3$ in quanto i primi corrispondono a sciami il cui asse in media passa molto più vicino alle camere di ionizzazione di quello che non si verifichi per i secondi; del resto, come si è detto in I-6,3, anche per questi eventi vi è un piccolo scarto in questo stesso verso.

In altre parole l'elevato valore sperimentale di γ relativo agli eventi Q sarebbe dovuto al fatto che il numero degli sciami che non hanno ancora raggiunto il loro massimo sviluppo è molto maggiore di quello che si calcola supponendo che la radiazione primaria responsabile di questi sciami sia assorbita con un cammino libero medio di poche decine di g/cm^2 come fin qui è stato supposto. Ciò sembra denotare che tale radiazione primaria (o qualeuno dei suoi secondari) è molto più penetrante di quanto si pensava.

Se tale radiazione primaria responsabile di questi sciami è di natura nucleonica, ossia della stessa natura di quella che si pensa costituire il grosso della primaria, ciò potrebbe indicare che ad energie elevate o il corpuscolo primario genera lo sciame in numerosi atti successivi in ciascuno dei quali perde una frazione non molto grande della sua energia o che la sezione d'urto totale di assorbimento va diminuendo con l'energia.

È per noi un gradito piacere ringraziare il prof. BRUNO FERRETTI per le numerose e utili discussioni avute su questo argomento.

SUMMARY

In this paper we complete the discussion of the experimental data concerning extensive air showers at 3500 m above sea level, begun in a preceding publication (I). We have examined the local multiplication of the shower particles and find a fairly good agreement between the experimental and theoretical results. It is found that the discrepancy (noted in I) between the theoretical and experimental values of the exponent γ of the integral size shower spectrum is not due to the particular lateral particle distribution used in the calculation; in fact the theoretical value of γ is much too insensitive both to the behaviour of the distribution in the vicinity of the shower axis and to the presence or absence of a «tail» in it for this discrepancy to be attributed to its actual form. It could be due however to the presence of showers which have not yet reached their maximum development.

Struttura delle tracce generate da particelle ionizzanti di alta energia.

P. BUDINI

Istituto di Fisica dell'Università - Trieste

(ricevuto il 21 Luglio 1950)

Riassunto. — Si calcola la densità media degli ioni in funzione della distanza dall'asse di una traccia generata dal passaggio di una particella carica di elevata energia entro una data sostanza. Si trova che il numero di ioni che si formano per unità di lunghezza entro una prefissata distanza dall'asse della traccia tende ad un valore finito al tendere all'infinito dell'energia della particella ionizzante. Si discute esaurientemente il caso delle tracce in idrogeno; si trova che la funzione esprimente la densità media degli ioni in funzione della distanza dall'asse è, quando si misuri quest'ultima in unità opportune, invariante, a meno di un fattore moltiplicativo, rispetto all'energia della particella ionizzante. Si discute il caso della traccia in un elemento qualsiasi.

1. — Introduzione.

Gran parte della moderna ricerca sperimentale sulla fisica nucleare e sui raggi cosmici si risolve in ultima analisi nello studio di tracce generate da particelle ionizzanti nel gas della camera di Wilson o nelle emulsioni nucleari. Dal punto di vista teorico il problema della ionizzazione è stato studiato ampiamente da BOHR, BETHE, BLOCH, WILLIAMS e altri; non si può tuttavia dire che esso sia stato completamente risolto; tra le varie contraddizioni tra esperienza e teoria che rimangono ancora da chiarire, emerge per attualità quella riguardante l'aumento logaritmico della ionizzazione per energie molto alte previsto dalla teoria e non confermato dalle osservazioni con le lastre nucleari ⁽¹⁾. D'altra parte un indizio che l'effetto debba sussistere lo si ha da

⁽¹⁾ G. P. S. OCCHIALINI: *Suppl. al Nuovo Cimento*, **6**, 377 (1949).

osservazioni di assorbimento di particelle di grande energia nelle quali l'esperienza indica un aumento della perdita di energia per ionizzazione (2) al crescere dell'energia al di là di un certo limite, come appunto è previsto dalle formule teoriche; ora, se si osserva che la genesi e la struttura di queste formule è del tutto simile a quelle riguardanti la ionizzazione, vien fatto di pensare che anche per la ionizzazione dovrebbe presentarsi l'aumento logaritmico che invece non è stato osservato. Una possibile spiegazione di questa almeno apparente contraddizione è stata dal BLACKETT (1) indicata nell'osservazione dovuta al WILLIAMS (3) che una particella ad altissima energia aumenta il suo « raggio d'azione ». Il lavoro del WILLIAMS sopraccitato ha tuttavia carattere semiquantitativo e non permette considerazioni conclusive.

Il presente lavoro è stato intrapreso allo scopo di studiare in modo sufficientemente esatto la struttura delle tracce di ionizzazione alle elevate energie per decidere se nella precedente interpretazione può risiedere la risoluzione del problema, e soprattutto in vista del fatto che se l'accennato processo di allargamento delle tracce effettivamente sussiste, non è assurdo sperare che possa essere di fondamento ad un nuovo metodo di misura dell'energia delle particelle ionizzanti nel difficile campo delle alte energie.

2. – Impostazione.

Nel seguito indicheremo con « traccia » l'insieme degli ioni primari generati da una particella ionizzante nell'attraversare un dato materiale omogeneo. Anmitteremo che la traccia presenti simmetria cilindrica e parleremo quindi di asse della traccia che coinciderà col luogo di più probabile passaggio della particella ionizzante. Non ci occuperemo della relazione tra gli ioni primari e le goccioline di nebbia o i granuli di emulsione che costituiscono le tracce sperimentalmente osservate.

Il problema della struttura della traccia non è naturalmente attaccabile col metodo di Born usualmente impiegato nei problemi di ionizzazione. Siamo ricorsi al metodo semiclassico di Weizsäcker e Williams che si presta idealmente al nostro scopo, prevedendo di confrontare le sezioni d'urto totali ricavabili per questa via con quelle già conosciute e ottenute col metodo di Born.

Come è noto il metodo di Weizsäcker e Williams consiste nell'identificare il campo di una particella di carica Ze , moventesi con velocità v , con un campo di radiazione elettromagnetica; precisamente la distribuzione spettrale dell'impulso di radiazione elettromagnetica in un punto che ha parametro d'urto p

(2) O. HARPEN e H. HALL: *Phys. Rev.*, **73**, 475 (1949).

(3) E. J. WILLIAMS: *Proc. Roy. Soc., A*, **139**, 163 (1933).

rispetto alla particella data è espressa da:

$$(1) \quad I(p, v) dv = \frac{c}{2\pi} \left\{ \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(p, t) \exp [2\pi i v t] dt \right|^2 + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_2(p, t) \exp [2\pi i v t] dt \right|^2 \right\},$$

dove

$$E_1 = \frac{Z e p \xi}{(p^2 + \xi^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad E_2 = \frac{Z e v t \xi}{(p^2 + \xi^2 v^2 t^2)^{3/2}},$$

con

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{v}{c},$$

sono le componenti del campo elettrico parallela e rispettivamente perpendicolare alla direzione di moto della particella.

Osservando che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_1(p, t) \exp [2\pi i v t] dt = - Z^2 e^2 \xi p \frac{d}{dp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp [2\pi i v t]}{\sqrt{p^2 + \xi^2 v^2 t^2}} dt$$

e che con la sostituzione

$$\xi v t = p \operatorname{senh} \left(\varphi + i \frac{\pi}{2} \right)$$

l'integrale in t si riduce alla rappresentazione integrale secondo SOMMERFELD della funzione di Hankel $H_0^{(1)}(ix)$ con $x = 2\pi p v / \xi v$, si ricava facilmente

$$(2) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(p, t) \exp [2\pi i v t] dt \right|^2 = \pi^2 \frac{Z^2 e^2}{v^2 p^2} x^2 \left[H_1^{(1)}(ix) \right]^2.$$

Per ricavare il contributo di E_2 basta osservare che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} E_2 \exp [2\pi i v t] dt &= \frac{v}{2\pi i p} \frac{d}{dv} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1 \exp [2\pi i v t] dt = \frac{Z e \pi}{i \xi v p} \frac{d}{dx} [x H_1^{(1)}(ix)] = \\ &= \frac{Z e \pi}{\xi v p} \frac{x}{i} H_0^{(1)}(ix), \end{aligned}$$

quest'ultima, quadrata e introdotta assieme alla (2) nella (1) dà in definitiva:

$$(3) \quad I(p, v) = \frac{2\pi^3 c Z^2 e^2 v^2}{\xi^2 v^4} \{ [H_1^{(1)}(ix)]^2 + \xi^{-2} [i H_0^{(1)}(ix)]^2 \},$$

allora il numero di fotoni aventi energia compresa fra k e $k + dk$ che passano a distanza tra p e $p + dp$ dalla regione dove transita la particella sarà:

$$N(p, k) dp dk = \frac{2\pi p}{k} I\left(\frac{k}{\hbar}, p\right) dp dk ;$$

per avere la probabilità $\pi(p, k) dp dk$ che un atomo con parametro d'urto compreso in dp venga ionizzato assorbendo un fotone di energia compresa in dk , basterà moltiplicare la precedente per la sezione d'urto $X(k)$ per effetto fotoelettrico di quell'atomo per fotoni di energia k :

$$(4) \quad \pi(p, k) dp dk = \frac{2\pi p}{k} I\left(\frac{k}{\hbar}, p\right) X(k) dp dk ;$$

ora la X per un atomo complesso di numero atomico \bar{Z} considererà generalmente in una somma di più termini, ognuno spettante ad un singolo elettrone; sarà precisamente della forma:

$$(5) \quad X(k) = \sum_1^{\bar{Z}} 1(k - J_n) \sigma_n(k) ,$$

ove il fattore

$$1(k - J_n) \quad \begin{cases} = 0 & \text{se } k < J_n, \\ = 1 & \text{se } k > J_n, \end{cases}$$

rappresenta il taglio della soglia fotoelettrica per l'ennesimo elettrone. Integrandando la (4) su tutti i valori di k dopo averci inserito le (3) e (5) si ottiene la probabilità $P(p) dp$ che un atomo con parametro d'urto compreso in dp venga ionizzato:

$$(6) \quad P(p) dp = \frac{4\pi^4 c Z^2 e^2}{\hbar^3 v^4 \xi^2} p dp \int_0^{\infty} \{ [H_1^{(1)}(ix)]^2 + \xi^{-2} [iH_0^{(1)}(ix)]^2 \} \sum_1^{\bar{Z}} 1(k - J_n) \sigma_n(k) k dk .$$

Se N è il numero di atomi per unità di volume, dalla precedente si ricava immediatamente la densità media $D(p)$ di ioni primari in funzione della distanza p dall'asse della traccia:

$$(6') \quad D(p) = N \frac{P(p)}{2\pi p} .$$

Per le applicazioni oltre alla (6) è utile il suo integrale definito tra due limiti fissi p_0 e p che, moltiplicato per N ci darà il numero medio di ioni primari che si formano in un toro cilindrico con asse coincidente con quello della traccia, altezza unitaria e raggi p_0 e p . Eseguendo la sostituzione:

$$(7) \quad p = \frac{\xi \hbar v}{k} x ,$$

si ottiene:

$$(8) \quad \int_{p_0}^p P(y) dy = \pi^2 \frac{eZ^2 e^2}{v^2 \hbar} \int_0^{\infty} \int_{p_0 k / \xi \hbar v}^{\infty} \{ [H_1^{(1)}(ix)]^2 + \xi^{-2} [iH_0^{(1)}(ix)]^2 \} x dx \sum_{k=1}^{\infty} 1(k - J_n) \sigma_n(k) k dk ,$$

e, siccome per le funzioni di Hankel vale la relazione

$$\int x [H_j^{(1)}(ix)]^2 dx = \frac{x^2}{2} \{ [H_j^{(1)}(ix)]^2 - H_{j-1}^{(1)}(ix) H_{j+1}^{(1)}(ix) \} ,$$

si ha:

$$(9) \quad \int_{p_0}^p P(y) dy = \pi^2 \frac{eZ^2 e^2}{v^2 \hbar} \times \int_0^{\infty} \left[\frac{x^2}{2} \{ [H_1^{(1)}(ix)]^2 (1 - \xi^{-2}) + \xi^{-2} [iH_0^{(1)}(ix)]^2 - H_0^{(1)}(ix) H_2^{(1)}(ix) \} \right] \frac{pk / \xi \hbar v}{|p_0 k / \xi \hbar v - 1|} \sum_{k=1}^{\infty} 1(k - J_n) \sigma_n(k) k dk .$$

Le condizioni di validità del precedente metodo sono, come noto:

a) $L \ll p$, dove L rappresenta le dimensioni dell'atomo.

b) $u / \sqrt{1 - u^2/c^2} \ll v \xi$, dove u è dell'ordine di grandezza delle velocità elettroniche dell'atomo considerato. Ambedue sono soddisfatte nel caso che ci interessa.

3. - Applicazione all'atomo di idrogeno.

Vogliamo ora applicare i risultati fin qui ottenuti al caso dell'atomo di idrogeno. La struttura della traccia si determinerà tramite la (6) che si ridurrà ad un solo termine e che, eseguita la sostituzione (7), si può porre nella forma:

$$(10) \quad P(p) dp = \frac{\pi e Z^2 e^2}{2 \hbar v^2 p} dp \int_{p J / \xi \hbar v}^{\infty} \{ [H_1^{(1)}(ix)]^2 + \xi^{-2} [iH_0^{(1)}(ix)]^2 \} \sigma \left(\frac{\gamma \hbar v}{p} x \right) x dx ,$$

dove $\sigma(k)$ è la sezione d'urto fotoelettrica per l'idrogeno. Conviene ora introdurre la lunghezza:

$$(11) \quad \Delta = \frac{\hbar \xi v}{J} = \frac{137 a_0}{2} \sqrt{\xi^2 - 1} ,$$

dove a_0 è il raggio di Bohr e J l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno.

Allora la (10) si può scrivere:

$$P(p) \, dp = \frac{\pi e Z^2 e^2}{2 \hbar v^2 \Delta} \frac{\Delta}{p} \int_{p/4}^{\infty} \{ [H_1^{(1)}(ix)]^2 + \xi^{-2} [iH_0^{(1)}(ix)]^2 \} \sigma \left(\frac{\Delta}{p} J x \right) x \, dx \, dp,$$

e, se con ρ indichiamo la distanza dall'asse della traccia misurata in unità Δ la precedente si può scrivere:

$$(12) \quad P(\rho) \, d\rho = \frac{\pi}{137^2 a_0^2 \beta^2 \sqrt{\xi^2 - 1}} F(\rho, \xi) \, d\rho,$$

e:

$$(12)' \quad D(\rho) = \frac{N}{137^2 a_0^2 \beta^2 (\xi^2 - 1)} \frac{F(\rho, \xi)}{\rho},$$

dove la $F(\rho, \xi)$, che ha le dimensioni di un'area, è della forma:

$$(13) \quad F(\rho, \xi) = \frac{1}{\rho} \int_{\rho}^{\infty} \{ [H_1^{(1)}(ix)]^2 + \xi^{-2} [iH_0^{(1)}(ix)]^2 \} \sigma \left(\frac{Jx}{\rho} \right) x \, dx.$$

Per ξ abbastanza grande ($\xi > 5$) la $F(\rho, \xi)$ è indipendente da ξ (variando ξ da 1 all'infinito la massima corrispondente variazione della $F(\rho, \xi)$ equivale alla riduzione di fattore 1/2); ciò è come dire, fisicamente, che quando si misurino le distanze dall'asse della traccia in unità ρ , la distribuzione degli ioni attorno alla traccia ha una forma ben definita indipendente dall'energia della particella ionizzante.

Per quanto riguarda il calcolo numerico osserviamo che la funzione integranda nella (13) decresce molto rapidamente al crescere di x al di là del limite di integrazione, e che interesserà quindi principalmente il comportamento della sezione d'urto fotoelettrica in prossimità della soglia; che nel caso dell'idrogeno è rispecchiata molto bene dalla espressione ⁽⁴⁾ (valevole per $k \lesssim 3J$):

$$(14) \quad \sigma(k) = 2^7 \frac{\pi e^2 \hbar}{3mc} \frac{J^3}{k^4} e^{-4} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{k - J}{J} \right),$$

dove il secondo e è la base dei logaritmi.

Abbiamo riportato in fig. 1, la $F(\rho, \xi)$ per l'Idrogeno calcolata numericamente tramite la (13) e la (14) e misurata in unità $\Phi_0 = (8/3)\pi r_0^2$ (sezione d'urto Thomson ⁽⁵⁾). Come si vede per $\rho < 0,1$ la $F(\rho, \xi)$ si identifica praticamente con la funzione $0,525 \cdot 137^3 \rho^{-1}$, di modo che risulta:

$$\left. \begin{aligned} P(p) &= \frac{4\pi Z^2 e^4}{Jmv^2} 0,282 p^{-1} \\ D(p) &= N \frac{2Z^2 e^4}{Jmv^2} 0,282 p^{-2} \end{aligned} \right\} \text{per } p < 0,1 \Delta.$$

⁽⁴⁾ H. BETHE: *Handbuch der Physik*, 24, 518.

⁽⁵⁾ W. HEITLER: *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford, 1949), pag. 37.

Per $\rho > 1$ la $F(\rho, \xi)$ tende molto rapidamente a zero e lo stesso avviene per la $P(p)$ e la $D(p)$ per $p > \Delta$.

In tab. I sono riportati i valori di Δ espressi in cm per alcuni valori dell'energia cinetica T della particella urtante espressi in unità $M_0 c^2$.

TABELLA I.

T	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4
Δ	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$6,2 \cdot 10^{-7}$	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$

Ci proponiamo ora di calcolare la sezione d'urto totale per l'idrogeno nell'intento di confrontarla con quella nota ottenuta col metodo di Born. A tal fine sarebbe necessario integrare la (10) rispetto a p da zero a infinito; d'altra

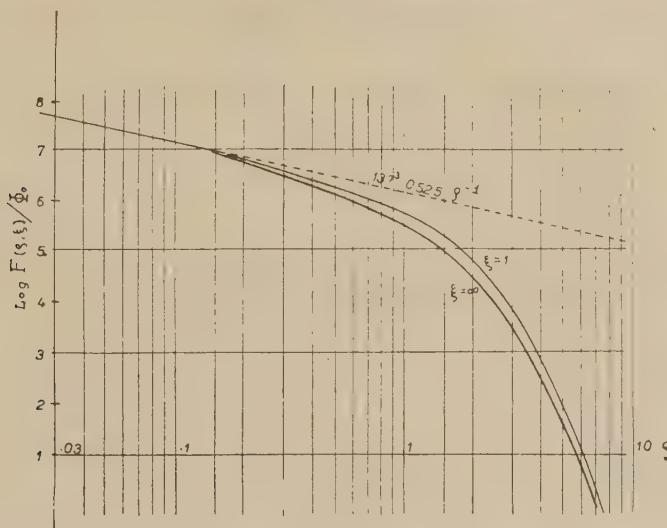


Foto 1.

parte come già menzionato, il metodo di Weizsäcker e Williams è applicabile solo finché p è maggiore delle dimensioni atomiche. Per gli urti con parametro d'urto più piccolo, che diremo urti stretti, sarà perciò necessario ricorrere ad altro metodo. Dato che questa parte del calcolo esula dallo scopo principale del nostro lavoro, ci accontenteremo di una prima approssimazione. Osserviamo che per parametri d'urto più piccoli di a_0 l'interazione tra la particella urtante e l'elettrone sarà maggiore di quella tra nucleo e elettrone, di modo che quest'ultimo, nella collisione si potrà considerare come praticamente libero. Nella teoria delle collisioni atomiche le sezioni d'urto presentano due

aspetti sostanzialmente diversi a seconda che l'angolo di cui devia la particella urtante è minore o maggiore di un certo angolo limite; e si dimostra che, in quest'ultimo genere di urti, l'elettrone atomico si può considerare come praticamente libero; noi identificheremo perciò questi urti con gli urti stretti e ne adotteremo la relativa sezione d'urto differenziale espressa in funzione dell'energia w trasmessa dalla particella urtante all'elettrone atomico (6) (7):

$$\theta(w) dw = \frac{2\pi Z^2 e^4}{mv^2} \frac{dw}{w^2} \left[1 - \frac{w}{2mc^2} \xi^2 \right] \left[1 + \frac{4J}{3w} \right],$$

questa, integrata su w da J al valore massimo di w (che per $\xi > 1,1$ si può porre praticamente uguale all'infinito) darà il contributo degli urti stretti alla sezione d'urto totale. A questa andrà aggiunto l'integrale della (6) rispetto a p da un p dell'ordine di a_0 all'infinito; si avrà in definitiva:

$$(15) \quad \Phi = \int_J^{\infty} \theta(w) dw + \int_{a_0}^{\infty} P(p) dp.$$

Il primo termine si calcola facilmente e si ottiene:

$$(16) \quad \int_J^{\infty} \theta(w) dw = \frac{2\pi Z^2 e^4}{Jmv^2} 0,282 \cdot 5,9.$$

Il secondo termine si ottiene dalla (8) ponendo $p_0 = a_0$ e $p = \infty$ e inserendovi la (14); si ottiene con elementari passaggi:

$$(17) \quad \int_{a_0}^{\infty} P(p) dp = \frac{2\pi Z^2 e^4}{Jmv^2} 0,282 \left[\log \frac{137^2}{4} (\xi^2 - 1) - 0,478 - \beta^2 \right].$$

Sommando la (16) e la (17) si ottiene infine:

$$(18) \quad \Phi = \frac{2\pi Z^2 e^4}{Jmv^2} 0,282 \left[\log \frac{137^2}{4} (\xi^2 - 1) + 5,42 - \beta^2 \right],$$

dove si può ritenere con buona approssimazione che il termine costante entro parentesi è il contributo degli urti stretti; gli altri due degli urti larghi e precisamente β^2 di E_2 e $\log(137^2/4)(\xi^2 - 1)$ di E_1 . La analoga alla (18) è la (55.13) del citato articolo del BETHE; essa si può porre nella forma:

$$(19) \quad \Phi = \frac{2\pi Z^2 e^4}{Jmv^2} 0,285 \left[\log \frac{137^2}{4} (\xi^2 - 1) + 5,8 - \beta^2 \right].$$

(6) H. BETHE: *Handbuch der Physik*, **24**, 518.

(7) L'ultimo fattore è stato aggiunto per tener conto del moto dell'elettrone atomico; cfr. E. J. WILLIAMS: *Kgl. Dan. Vid. Selsk.*, **13**, 4 (1935).

L'ottimo accordo tra i termini logaritmici delle (18) e (19) conferma il fatto già rilevato dal WILLIAMS (3) che l'aumento relativistico della ionizzazione è da attribuirsi all'aumentare del raggio d'azione della particella ionizzante in seguito alla contrazione di Fitzgerald-Lorenz del suo campo. L'accordo tra i termini costanti entro parentesi può esser anche casuale o, quanto meno, richiederebbe una giustificazione più rigorosa della via adottata nella trattazione degli urti stretti per permettere considerazioni significative che tuttavia esulano dallo scopo del presente lavoro.

4. - Atomi complessi.

Vogliamo ora dedurre alcune considerazioni e formule generali relative agli atomi complessi. In questo caso la corrispondente della (10) è:

$$P(p) dp = \frac{\pi c Z^2 e^2}{2 \hbar v^2 p} dp \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p J_n / \xi \hbar v}^{\infty} \{ [H_1^{(1)}(ix)]^2 + \xi^{-2} [i H_0^{(1)}(ix)]^2 \} \sigma_n \left(\frac{\xi \hbar v}{p} x \right) x dx ,$$

che, posto

$$(20) \quad \frac{\xi \hbar v}{J_n} = p_n ,$$

si può porre nella forma:

$$(21) \quad P(p) dp = \frac{\pi c Z^2 e^2}{2 \hbar p} dp \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p/p_n}^{\infty} \{ [H_1^{(1)}(ix)]^2 + \xi^{-2} [i H_0^{(1)}(ix)]^2 \} \sigma_n \left(\frac{p_n}{p} J_n x \right) x dx .$$

Le considerazioni svolte nel numero precedente possono essere generalizzate e applicate alla (21); si ottiene che la $P(p)$ tende rapidamente a zero quando p diventa maggiore del massimo p_n che compare nella sommatoria; e questo, che indicheremo con $p_{\bar{Z}}$ si otterrà dalla (20) inserendovi il minimo valore dell'energia di ionizzazione $J_n = J_{\bar{Z}}$ cioè quella relativa all'elettrone ottico. Infatti se

$$(22) \quad p \gg p_{\bar{Z}} = \frac{\xi \hbar v}{J_{\bar{Z}}} ,$$

alle funzioni di Hankel che compaiono nella (21) si possono sostituire le loro espressioni asintotiche per $x \gg 1$ che sono:

$$\frac{H_1^{(1)}(ix)}{i H_0^{(1)}(ix)} \rightarrow \frac{2}{\pi x} \exp[-2x] ,$$

e allora all'aumentare di p la (21) tende a zero approssimativamente come $\exp[-2p/p_{\bar{Z}}]$. Quando p diventa minore del minimo p_n che compare nella

sommatoria, il quale si ottiene ponendo nella (20) l'energia di ionizzazione J_K del livello K dell'atomo considerato, la $P(p)$ sarà della forma costante/ p ; fissiamo infatti la nostra attenzione sulla (7); per l'accennata proprietà della sezione d'urto fotoelettrica di decrescere rapidamente al di là della soglia, il massimo valore significativo che acquisterà k nell'integrazione rispetto a k sarà dell'ordine di J_K di modo che se, come ammesso per ipotesi,

$$(23) \quad p \ll p_K = \frac{\xi \hbar v}{J_K}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{p J_K}{\xi \hbar v} \ll 1,$$

l'argomento delle funzioni di Hankel che figura nella (7) rimarrà praticamente sempre minore di uno, cosicchè esse si potranno, senza apprezzabile errore, sostituire con le loro espressioni asintotiche per $x \ll 1$ che sono:

$$iH_0^{(1)}(ix) \rightarrow \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{\gamma x}; \quad H_1^{(1)}(ix) \rightarrow -\frac{2}{\pi x}; \quad H_2^{(1)}(ix) \rightarrow \frac{4i}{\pi x^2};$$

introdotte queste nella (9) si ottiene infine:

$$(24) \quad \int_{p_0}^p P(y) dy = 4 \frac{e Z^2 e^2}{\hbar v^2} \log \frac{p}{p_0} \int_0^\infty \bar{Z} \sum_1^\infty 1(k - J_n) \sigma_n(k) \frac{dk}{k},$$

che, derivata rispetto a p dà appunto:

$$(25) \quad P(p) = 4 \frac{e Z^2 e^2}{\hbar v^2} p^{-1} \int_0^\infty \bar{Z} \sum_1^\infty 1(k - J_n) \sigma_n(k) \frac{dk}{k};$$

siccome dato p si può sempre trovare un ξ tale che la (23) sia soddisfatta, si deduce che al tendere all'infinito dell'energia della particella ionizzante la distribuzione degli ioni nella traccia tende ad una configurazione limite indipendentemente dalla sostanza in cui si osserva la traccia, che figura solo tramite l'integrale della sua sezione d'urto fotoelettrica a fattore moltiplicativo. Concludendo, l'andamento asintotico della $P(p)$ per gli atomi complessi sarà identico a quello per l'idrogeno; mentre la zona intermedia, che per l'atomo di idrogeno si aveva per $p \cong p_0$, sarà nel caso degli atomi complessi distribuita tra $p = p_K$ e $p = p_{\bar{Z}}$; tuttavia di questi due limiti solo il secondo è veramente significativo; infatti tenendo presente che, come già osservato la funzione integranda negli integrali (21) è rapidamente decrescente con x e che i valori delle funzioni $\sigma_n(k)$ alla soglia aumentano notevolmente via via che si va verso livelli più alti (per es. $\frac{\sigma_L(J_L)}{\sigma_K(J_K)} \cong 64 \frac{J_K}{J_L}$) si conclude che nella (21) saranno largamente preponderanti quei termini della sommatoria che si riferiscono agli elettroni meno legati per la doppia ragione che i corrispondenti integrali hanno il limite inferiore più piccolo e più grande il valore di soglia

della sezione d'urto fotoelettrica. In altri termini all'effetto contribuirà preponderantemente la ionizzazione degli elettroni di valenza e le conclusioni raggiunte nel caso dell'atomo di Idrogeno si potranno, in prima approssimazione estendere agli atomi complessi salvo a sostituire p_0 con $p_{\bar{Z}}$.

5. - Confronti con l'esperienza e conclusione.

Dopo quanto esposto nei precedenti paragrafi si può ora tentare di dare una descrizione dell'evoluzione della traccia all'aumentare dell'energia della particella ionizzante. Alle basse energie ($\xi \leq 1$) la ionizzazione avviene quasi esclusivamente per urti stretti e quindi le dimensioni trasversali della traccia sono dell'ordine di qualche diametro atomico; via via che aumenta l'energia ($\xi > 1$) vengono ionizzati atomi sempre più lontani dalla zona di passaggio della particella ionizzante (da notare che per il contributo di v nelle (11) e (20) questo allargamento si ha ancor prima che intervenga la contrazione di Fitzgerald-Lorentz) mentre il numero di ioni per cm generati negli urti stretti diminuisce tendendo ad un valore limite per β tendente ad uno. Al di là dell'energia di riposo, per ogni aumento ulteriore dell'energia cinetica, ($\xi \gg 1$) il raggio d'azione della particella ionizzante aumenta, proporzionalmente all'energia, per effetto della contrazione di Fitzgerald-Lorentz del campo della particella e si formano sempre nuovi ioni, ma a distanze sempre più grandi (con densità sempre più piccola) dall'asse della traccia; e tutti questi nuovi ioni si distribuiscono via via attorno alla traccia secondo una legge prestabilita; precisamente al limite per energia infinita la loro densità varia come:

$$(26) \quad D(p) = \text{cost.} \frac{Z^2 e^2}{p^2},$$

(per una data energia la (26) vale finchè $p \ll \Delta$), dove Ze è la carica della particella ionizzante e la costante dipende solo dalle caratteristiche del mezzo ionizzato.

È chiaro allora come il numero di ioni per cm che si formano entro un cilindro di dato raggio p e asse coincidente coll'asse della traccia tenderà ad un valore limite $L(p)$ all'aumentare dell'energia; questo valore limite si calcolerà tramite la (15) nella quale però il secondo integrale andrà esteso da a_0 a p anzichè da a_0 a ∞ . Qualora si ponga p dell'ordine di grandezza del raggio r di un granulo di emulsione nucleare ($r \approx 0,9 \mu$ ⁽⁸⁾) si ottiene che $L(r)$ è di poco superiore al numero L_0 di ioni per cm che si formano al minimo di ionizzazione: precisamente otteniamo che in prima approssimazione $L(r)/L_0$ è uguale a $1,26 \pm 0,03$ per l'H; $1,18 \pm 0,07$ per l'Ag; $1,1 \pm 0,05$ per il Na;

⁽⁸⁾ G. BARONI e C. CASTAGNOLI: *Nuovo Cimento*, **7**, 364 (1950).

ed entro questi limiti per gli altri elementi qualora si ammettesse che il rapporto tra il numero di ioni primari e il numero di granuli nelle emulsioni non vari sensibilmente al variare dell'energia, alle alte energie, le precedenti conclusioni potrebbero, almeno in parte, spiegare la mancata osservazione dell'aumento logaritmico. (Osserviamo che BRADT e coll. ⁽⁹⁾ registrano, nel primario di una stella avente energia compresa tra 10^3 e $10^4 M_0 c^2$, una ionizzazione di 1,15 volte il minimo in accordo con i nostri calcoli; mentre a quell'energia la particella, dovrebbe ionizzare almeno 1,6 volte il minimo).

Se quindi si volesse osservare l'aumento relativistico della ionizzazione si dovrebbe studiare la distribuzione dei granuli ai bordi e nelle vicinanze delle tracce. Per una discussione approfondita su questa possibilità sarà tuttavia necessario tener conto, tra l'altro, anche dell'effetto di densità ⁽²⁾ che nel nostro caso avrà per effetto l'attenuazione della ionizzazione a una certa distanza dalla traccia, come verrà esposto in un prossimo lavoro.

Ringrazio il prof. N. DALLAPORTA per il gentile interessamento col quale ha seguito lo svolgimento di questo lavoro e per gli utili consigli e discussioni.

⁽⁹⁾ H. L. BRADT, M. S. KAPLON e B. PETERS: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 24 (1950)

SUMMARY

The author discusses the structure of a ionization track generated by a charged particle of great energy. The Weizsäcker-Williams method is employed, and the integrated results are compared with those obtained with the Born method. It is found that, as the energy of the particle increases, the distribution of the ions which it generates, approaches a limit configuration in which their density is represented by $\text{const.}/p^2$ where p is the distance from the axis of the track, and the constant is the integrated photoelectric cross section of the ionized atoms; it follows that the number of ions pro cm in a track of fixed thickness approaches a fixed value for increasing energy; and if the thickness is comparable with that of the nuclear emulsion, this value is very near to that corresponding to the minimum ionization. The case of tracks in H is treated and that of tracks in other elements discussed.

Sulla conversione interna della energia cinetica degli elettroni delle sostanze β^- attive.

B. BRUNELLI e D. CUNSOLO

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del N.C.R., Roma

(ricevuto il 26 Luglio 1950)

Riassunto. — Sono state prese in considerazione le tracce positive uscenti da un preparato di Ra(B + C): dal loro confronto con le tracce casualmente incidenti sul preparato, si è potuto concludere trattarsi di un effetto strumentale.

1. — Molti autori hanno trovato in camera di Wilson (C.W.), accanto alle tracce negative dei preparati β^- , anche alcune tracce positive, nella proporzione da 1 % a 0,1 %, di aspetto simile a quello degli elettroni.

ALICHANOW, ALICHANIAN e KOSODAEW ⁽¹⁾, SKOBELZIN-STEPANOVA ⁽²⁾ e DA SILVA ⁽³⁾ con Ra(B + C), PAXTON ⁽⁴⁾ con ^{32}P , BARENDEGT-GRIFFIOEN-SIZOO ⁽⁵⁾ con UX e ^{32}P osservarono per primi tale fenomeno.

La prima ipotesi formulata considerò le tracce positive osservate come dovute a positroni generati in coppia dalla conversione interna dell'energia cinetica degli elettroni negativi, oltrechè da quanti γ (quando la sorgente β^- attiva ne avesse emessi).

In contraddizione con tale ipotesi stavano:

a) la teoria di Dirac, che non prevedeva per tale fenomeno una frequenza tanto elevata ⁽⁶⁾;

⁽¹⁾ A. ALICHANOW, A. ALICHANIAN e M. KOSODAEW: *Nature*, **136**, 719 (1935).

⁽²⁾ D. SKOBELZYN e E. STEPANOWA: *Nature*, **137**, 272 (1936).

⁽³⁾ A. MARQUES DA SILVA: *Ann. de Phys.*, **11-12**, 504 (1939).

⁽⁴⁾ H. G. PAXTON: *Phys. Rev.*, **49**, 206 (1936).

⁽⁵⁾ F. BARENDEGT, J. GRIFFIOEN e G. J. SIZOO: *Physica*, **7**, 860 (1940).

⁽⁶⁾ N. ARLEY, C. MØLLER: *Kgl. Danske Vid. Selsk. Math. Fys. Medd.*, **15**, 9 (1938).

b) la presenza, tra le tracce positive, di qualcuna con H_P superiore alla energia massima prevedibile dalla teoria, in base alla energia massima degli elettroni del preparato (7);

c) i risultati negativi di tutte le esperienze che, con tecniche diverse da quella della C.W. (8) (9), erano state condotte per mettere in evidenza le sudette particelle positive;

d) le esperienze (3), (10) con le quali se ne studiarono le curve di assorbimento nell'alluminio e nel piombo. In dette esperienze le particelle risultarono molto più penetranti degli elettroni; esse apparivano anche se la sorgente era circondata da piombo sufficiente ad assorbire tutte, qualora fossero state positroni;

e) la mancanza di fotoni di annichilimento (11), (12), (13), (14).

Naturalmente appaiono come tracce positive uscenti dal preparato anche quelle di elettroni casualmente incidenti su di esso. BRADT, HEINE e SCHERRER (7) tennero conto di questa eventualità contando le tracce di fondo della C.W. che per una opportuna direzione iniziale avevano qualche probabilità di passare per il preparato. Moltiplicando il numero di queste tracce per il rapporto dei diametri del preparato e dell'intera camera ottennero il numero di elettroni di fondo incidenti sul preparato stesso: ma questo numero non bastava assolutamente a giustificare tutte le tracce positive. Essi conclusero che le tracce residue erano dovute veramente a particelle positive e che il potere penetrante osservato li conduceva addirittura a supporre per esse una massa alquanto inferiore a quella dell'elettrone; così restava spiegato anche il punto b), dato che l'energia cinetica degli elettroni, insufficiente a produrre un positrone, poteva bastare a produrre una massa minore.

GROETZINGER e SMITH (15) nel 1946 avanzarono invece l'ipotesi che si trattasse di secondari di una radiazione più penetrante sfuggente all'osservazione. Essi fecero incidere le particelle in questione su una lastrina di alluminio posta nella C.W. e, confrontando la loro perdita di momento con quella di elettroni di eguale momento iniziale, conclusero che esse erano più pesanti dell'elettrone.

Anche questa conclusione sembra strana, ma non è possibile una critica seria dell'esperienza perchè non sono sufficientemente chiari alcuni particolari

(7) H. BRADT, H. G. HEINE e P. SCHERRER: *Helv. Phys. Acta*, **16**, 491 (1943).

(8) H. G. HEINE: *Helv. Phys. Acta*, **17**, 273 (1944).

(9) J. HALTER: *Helv. Phys. Acta*, **19**, 431 (1946).

(10) G. J. SIZOO e F. BARENDEGT: *Physica*, **6**, 1085 (1939).

(11) H. BRADT, J. GUILLISEN e P. SCHERRER: *Helv. Phys. Acta*, **13**, 259 (1940).

(12) H. BRADT: *Helv. Phys. Acta*, **17**, 59 (1944).

(13) CHIEN SHIUNG WU - *Phys. Rev.*, **59**, 481 (1941).

(14) K. SIEGBAHN e H. SLÄTIS: *Ark. Math. Astr. Fys.*, **34 A**, n. 6, pag. 1 (1946).

(15) L. SMITH e G. GROETZINGER: *Phys. Rev.*, **70**, 96 (1946).

di essa, come, ad esempio, la posizione del preparato. D'altronde codeste ipotesi di esistenza di particelle nuove non hanno avuto ulteriore conferma.

Altre esperienze eseguirono PI e CHAO (16) e CUSKER (17).

PI e CHAO, nella parte dell'esperienza relativa alla conversione interna, considerano solo le tracce più lunghe di 4 cm, e trovano una frequenza N^+/N^- uguale a 10^{-4} (con una sola traccia positiva). Questo risultato non è da paragonarsi a quello dei precedenti autori perchè ottenuto trascurando prevalentemente tracce di bassa energia, il che porta ad esclusioni percentuali diverse per le tracce positive e negative. In seguito calcolarono col metodo del rapporto dei diametri, già usato da SCHERRER, la probabilità che un elettrone negativo proveniente dalle pareti urtasse contro il preparato; l'unica traccia positiva fu giustificata in tale modo.

CUSKER collimando la sorgente ridusse a 0,1 % la frequenza delle tracce positive, valore che spiegò con effetto di sparpagliamento.

Avendo letto le suddette relazioni, ci venne il sospetto che fosse possibile spiegare tutte le tracce positive (e non una parte soltanto) come elettroni diretti verso la sorgente: durante il corso delle nostre esperienze uscirono altre pubblicazioni che ci confermarono nelle nostre convinzioni.

ERDMAN, KOKOTAILO e SCOTT (18), servendosi del rapporto dei diametri, concludono che non ci sono particelle positive.

Particolarmenete felice è il dispositivo spettrometrico in C.W. di SPAA e SIZOO (19). Su 1175 elettroni essi trovarono una sola traccia positiva, riconosciuta come traccia di elettrone diretta verso il preparato. Abbiamo calcolato la probabilità che si trattasse di un positivo proveniente dalla sorgente che per effetto di sparpagliamento appaia come negativo proveniente dalla parete: essa è solo dell'1 %. Però sarebbe stata preferibile una statistica maggiore per potere a buon diritto concludere che veramente la frequenza N^+/N^- è inferiore a 0,1 %.

2. - Il nostro proposito è stato quello di paragonare direttamente la frequenza e l'energia delle supposte particelle positive con quelle degli elettroni di fondo passanti per il preparato. Per questo scopo ci è parso insoddisfacente il metodo del rapporto dei diametri, per la validità del quale è necessario considerare solo le tracce lunghe all'incirca quanto il raggio della C.W.. Abbiamo perciò eseguito due gruppi di fotografie: uno con un preparato debole di Ra(B + C) posto in un tubicino di vetro, l'altro sostituendo quest'ultimo con un vetrino delle stesse dimensioni, ma senza preparato. Dal confronto

(16) T. H. PI e C. Y. CHAO: *Phys. Rev.*, **72**, 639 (1947).

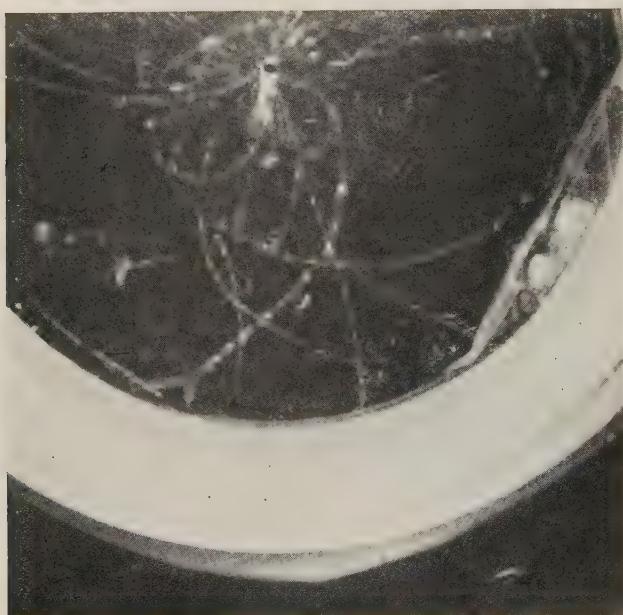
(17) C. B. A. MC CUSKER: *Nature*, **161**, 564 (1948).

(18) K. L. ERDMAN, G. T. KOKOTAILO e D. B. SCOTT: *Phys. Rev.*, **76**, 1262 (1949).

(19) J. H. SPAAN e G. J. SIZOO: *Physica*, **15**, 316 (1949).

delle tracce positive del primo gruppo con quelle passanti per il vetrino del secondo gruppo abbiamo concluso trattarsi di un effetto strumentale, nel senso che il rapporto N^+/N^- è certamente inferiore a qualche unità su 10^4 , presumibilmente inapprezzabile con la C.W..

L'intensità del preparato era debole affinchè gli elettroni riflessi dalle pareti della C.W. fossero trascurabili rispetto a quelli da esse prodotti e affinchè la fotografia fosse ben chiara nelle immediate vicinanze del preparato.



Fot. 1.

La nostra camera, del diametro di 22 cm, era piena di aria a 70 cm di Hg; il campo magnetico era di 210 oersted. Il preparato, Ra(B + C), era posto al centro della camera in un tubicino capillare di vetro del diametro 1,7 mm con pareti di 11 mg/cm². La grandezza della macchia risultante sulla lastra frontale di vetro era di 2 mm di diametro. Per esser certi che il percorso nel vetro fosse il più possibile lo stesso per tutti gli elettroni abbiamo avuto cura che il depositivo attivo fosse limitato alla regione centrale del vetrino.

Con questo dispositivo abbiamo fatto 1175 fotografie del primo gruppo con $N^- = 7790$: inoltre abbiamo notato 51 tracce che a prima vista potevano appartenere a particelle positive. La fotografia 1 mostra una di tali tracce positive.

Per la critica di queste tracce abbiamo preso in considerazione i seguenti

punti:

- a) distanza di passaggio della traccia dal preparato;
- b) lunghezza del tratto sfumato iniziale;
- c) sparpagliamento;

inoltre:

d) abbiamo scartato tutte quelle tracce che per le loro irregolarità non permettevano una valutazione accurata del loro comportamento.

Delle 51 tracce trovate:

8 ci apparvero ineccepibili poichè:

a) la traccia passava per il preparato;

b) la lunghezza del tratto sfumato era circa uguale a quella degli elettroni del preparato;

c) la formula di Bethe sullo sparpagliamento multiplo dava $\beta/\beta_0 > 1,4$ (20) (la maggior parte di queste tracce aveva $\beta/\beta_0 > 2$).

15 altre ci sembrarono accettabili perchè:

a) la distanza di passaggio della traccia dal preparato era inferiore a 1 mm (questa era tollerabile essendo state osservate tracce di elettroni aventi analogo comportamento);

b) la lunghezza del tratto sfumato era poco maggiore di quella media nella stessa fotografia, ma comunque non superiore a 1,5 cm;

c) $\beta/\beta_0 > 1,4$ (quasi tutte le tracce di questa categoria avevano $\beta/\beta_0 > 1,8$).

Scartammo 10 tracce in base ai punti a) e b); 5 tracce in base al punto c), 13 tracce in base al punto d).

Abbiamo così ottenuto 23 tracce positive, cioè

$$\frac{N^+}{N^-} = 0,3 \text{ \%}.$$

Il numero dei positivi per fotografia era

$$\frac{N^+}{\text{foto}} = (1,96 \pm 0,4) \cdot 10^{-2}.$$

Gli elettroni di fondo per fotografia erano

$$\frac{N^-}{\text{foto}} = 2,08 \pm 0,05.$$

(20) Dove β è la velocità dell'elettrone e β_0 è la velocità minima affinchè lo sparpagliamento non renda priva di senso una misura di curvatura (H. BETHE: *Phys. Rev.*, **70**, 821 (1946)).

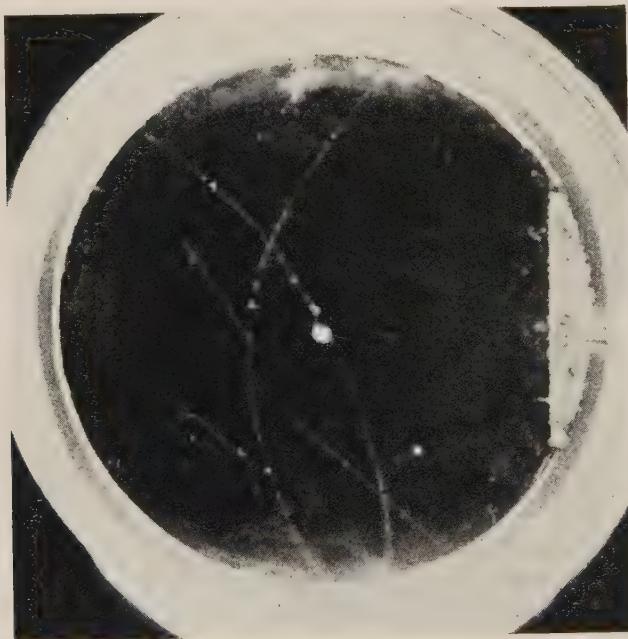
Il secondo gruppo era di 402 fotografie con 734 elettroni di fondo; cioè

$$\frac{N'_-}{\text{foto}} = 1,83 \pm 0,07.$$

Notiamo che gli elettroni riflessi dalle pareti della C.W. nella prima prova sono dati dalla differenza degli elettroni di fondo nei due gruppi di fotografie:

$$\frac{N'_-}{\text{foto}} = \frac{N'_f}{\text{foto}} - \frac{N'_f}{\text{foto}} = 0,25 \pm 0,12.$$

Abbiamo osservato 22 tracce che potevano figurare come positive uscenti dal



Fot. 2.

vetrino: la fotografia 2 mostra una di tali tracce. Di queste, in base agli stessi criteri usati per l'altra prova, ne abbiamo considerate 5 inaccettabili, altre 5 accettabili, mentre 5 erano inaccettabili in base ai criteri *a*), *b*) e *c*), 7 in base al criterio *d*). Allora $N'^+/\text{foto} = (2,5 \pm 0,8) \cdot 10^{-2}$. Come si vede $N^+/\text{foto} \cong N'^+/\text{foto}$, anzi N^+/foto , per scarti statistici, è risultato inferiore a N'^+/foto . Gli scarti statistici possono portare ad una differenza in senso contrario uguale a:

$$\frac{N^+}{\text{foto}} - \frac{N'^+}{\text{foto}} \cong 0,66 \cdot 10^{-2},$$

che corrisponde a 8 tracce. Questa eventualità è già poco probabile; tuttavia la presenza di queste tracce può essere ancora giustificata. Infatti, degli N_r^- elettroni riflessi, un numero pari a $N_r^+ = N_r^-(N'^+/N_f'^-)$ passa per il vetrino (evidentemente l'espressione tra parentesi rappresenta il valore sperimentale da sostituire al rapporto dei diametri). Ponendo $N_r^-/\text{foto} = 0,25$ si ha $N_r^+ = 4$; ponendo invece $N_r^-/\text{foto} = 0,25 + 0,12$ si ha $N_r^+ = 6$. Inoltre, usando le formule di Bethe sullo sparpagliamento multiplo, abbiamo calcolato che l'ordine di grandezza della probabilità che un elettrone negativo nella nostra esperienza venga inflesso tanto da apparire come positivo è di qualche unità su 10^4 , che equivale a $2 \sim 3$ elettroni. Ci sembra, alla luce di questi risultati, di poter concludere che le tracce osservate sono solo un effetto strumentale.

I nostri risultati sono stati inclusi nella seguente tabella:

Foto		N^-	N_f^-	N^+	$\frac{N^+}{N^-}$	$\frac{N_f^-}{\text{foto}}$	$\frac{N^+}{\text{foto}}$
I gruppo	1175	7790	2450	23	0,3 %	2,08 ± 0,05	$1,96 \cdot 10^{-2}$ ± $0,4 \cdot 10^{-2}$
II gruppo	402	—	734	10	—	1,83 ± 0,07	$2,5 \cdot 10^{-2}$ ± $0,8 \cdot 10^{-2}$

A ulteriore conferma abbiamo tracciato due spettri H_ρ -frequenza: uno per le tracce positive, l'altro per 46 tracce di elettroni di fondo scelti a caso nel primo gruppo di fotografie (sempre con $\beta/\beta_0 > 1,4$).

Nel tracciare i grafici abbiamo voluto tener conto della imprecisione della misura del raggio curvatura, imprecisione dovuta allo sparpagliamento. Perciò abbiamo rappresentato l'elettrone di raggio di curvatura ρ con un'area prefissata distribuita, con baricentro nel punto di ascissa ρ , su una base più o meno larga a seconda dell'entità dell'effetto di sparpagliamento.

Quest'area è quindi distribuita tra le ascisse ρ_1 e ρ_2 con

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_s} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s}$$

dove $1/\rho_s$ è la curvatura quadratica media probabile dovuta a sparpagliamento multiplo secondo Bethe. In base ai criteri di scelta delle tracce, non ve n'è tra esse alcuna con $\rho < 2,5$ cm, poiché per raggi di curvatura minore si avrebbe $\beta/\beta_0 < 1,4$. Come si vede, gli spettri mostrano lo stesso andamento. Anzi, a tale proposito, vogliamo notare che gli spettri di SIZOO e BARENDEGT (21).

(21) F. BARENDEGT, G. J. SIZOO: *Physica* 7, 490, (1940).

ottenuti con $\text{Ra}(\text{B} + \text{C})$ ed UX, sono tracciati accettando anche tracce aventi

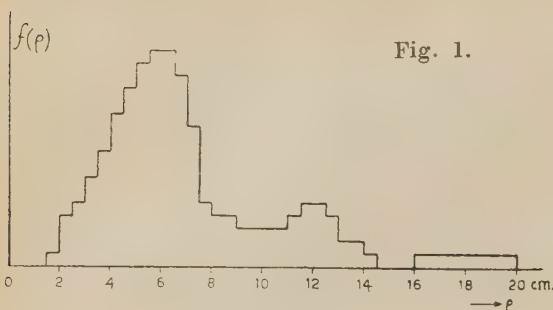


Fig. 1.

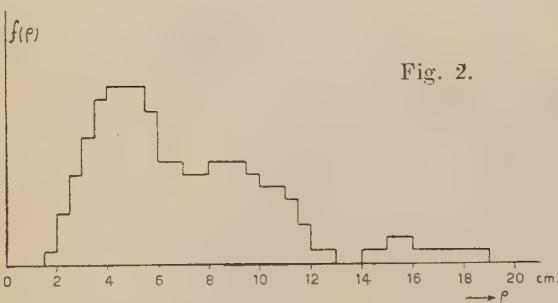


Fig. 2.

Curve H_p — frequenza per le tracce positive (fig. 1) e per gli elettroni di fondo (fig. 2). Il campo magnetico è di 210 Oersted. Le aree totali sono uguali.

H_p inferiori a quelli consentiti dalla formula di Bethe. Eliminando tale regione dei diagrammi sparisce il primo massimo dello spettro tracciato con $\text{Ra}(\text{B} + \text{C})$ e i due spettri diventano essenzialmente coincidenti non solo tra loro, ma anche con i nostri. Questo significa che le condizioni strumentali erano circa le stesse nelle varie esperienze.

Ringraziamo vivamente i proff. M. AGENO e B. FERRETTI per le discussioni avute. Ringraziamo inoltre sinceramente il sig. M. BENEVENTANO per il contributo dato alla parte sperimentale.

SUMMARY

In order to decide if the « positive tracks » observed in the Wilson chamber are produced by positive particles coming from the source or by electrons coming from the walls, two sets of photos have been taken. One set (1175 photos) was taken with a $\text{Ra}(\text{B} + \text{C})$ source, contained in a glass holder placed in the middle of the chamber, and the other set (402 photos) without it. Comparing the « positive tracks » (23 compared with 7790 electrons) to the tracks of the second set (10 tracks) which appeared as positive particles coming from the empty holder, we can conclude that no positive particles have been observed.

Generazione di mesoni da parte di fotoni.

G. MORPURGO

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R., Roma

(ricevuto il 26 Luglio 1950)

Riassunto. — In relazione alle esperienze di Berkeley sulla generazione di mesoni da parte di fotoni, si calcolano nella prima approssimazione della teoria delle perturbazioni (*eg*) le sezioni d'urto differenziali per il processo in questione; si fa uso della teoria pseudoscalare con accoppiamento pseudoscalare e della teoria scalare con accoppiamento scalare. Al contrario che in lavori precedenti, nel calcolo qui sviluppato si tiene conto anche del rinculo dei nucleoni; si mostra come il tener conto di tale rinculo, non soltanto sia sempre essenziale per le alte energie, ma, nel caso della teoria pseudoscalare-pseudoscalare sia essenziale anche per le basse energie del fotone incidente. In particolare viene discussa la questione del rapporto tra il numero di mesoni positivi e quello di mesoni negativi generati nel ciclotrone di Berkeley, concludendosi che tanto la teoria pseudoscalare (come già accertato da KOBA ⁽⁴⁾ e coll.) quanto quella scalare danno luogo, a rapporti (eguali ed) in buon accordo con l'esperienza. Per quanto riguarda le alte energie del fotone incidente le formule qui ricavate mostrano, ad es., come per un'energia di 10 GeV del fotone incidente il rapporto tra il numero dei negativi e quello dei positivi risulti essere dell'ordine dell'unità a 0° (rispetto alla direzione del fotone incidente) ma vari molto rapidamente con l'angolo, diventando pari a ~ 120 per un angolo di 90°.

La produzione di mesoni da parte di fotoni è stata studiata a Berkeley in varie esperienze ⁽¹⁾, ⁽²⁾, ⁽³⁾ inviando il fascio di fotoni prodotto nel ciclotrone di 330 MeV su un assorbitore di Carbonio.

⁽¹⁾ K. A. BRUECKNER e M. L. GOLDBERGER: *Phys. Rev.*, **76**, 725 (1949).

⁽²⁾ J. STEINBERGER e A. S. BISHOP: *Phys. Rev.*, **78**, 494 (1950).

⁽³⁾ J. M. PETERSON, R. S. WHITE e W. S. GILBERT: Mexico Meeting in *Bull. of the Am. Phys. Soc.*, pag. 20 (June 1950).

I risultati di queste esperienze sembrano mostrare: 1) che per un'energia del fotone incidente dell'ordine di 300 MeV, il rapporto tra il numero dei mesoni negativi e quello dei mesoni positivi generati nell'assorbitore è maggiore dell'unità (più precisamente questo rapporto è $1,35 \pm 0,15$ per un angolo di osservazione di 90° rispetto alla direzione dei fotoni incidenti); 2) che la distribuzione angolare dei mesoni emessi, indipendentemente dal segno della loro carica, è assai piatta.

Alcuni calcoli sono stati compiuti ⁽¹⁾, ⁽⁴⁾, per vedere se sia possibile sulla base delle teorie mesoniche interpretare questi fatti sperimentali, la questione essendo assai importante in quanto può servire come prova per le teorie mesoniche stesse; tuttavia non si dà in generale alcun dettaglio dei calcoli, gli Autori limitandosi ad asserire se il risultato finale è in accordo o in disaccordo con l'esperienza. Di più per quanto riguarda il primo punto (rapporto negativi-positivi) la discussione è limitata alla teoria pseudoscalare con accoppiamento pseudoscalare. Poichè la considerazione di altre teorie mesoniche è importante si è creduto utile esaminare l'intera questione.

Calcoleremo perciò con la teoria delle perturbazioni le sezioni d'urto per produzione di un mesone positivo (negativo) nell'urto di un fotone contro un protone (neutrone) nella teoria scalare con accoppiamento scalare e pseudoscalare con accoppiamento pseudoscalare.

Nella letteratura, ed in particolare in quella di questi ultimissimi anni, si hanno numerosi calcoli del tipo ⁽⁵⁾. Tuttavia un esame un po' accurato mostra come tali calcoli siano inservibili per il nostro problema: una differenza tra la sezione d'urto per produzione di un mesone negativo e quella di un mesone positivo si può infatti avere soltanto quando si tenga conto del rinculo dei nucleoni mentre gli Autori prima citati hanno quasi sempre svolto la teoria con nucleoni di massa infinita.

Inoltre, indipendentemente dal problema del rapporto tra il numero dei negativi e quello dei positivi, una valutazione esatta delle sezioni d'urto (naturalmente entro i limiti imposti dalla teoria delle perturbazioni) è utile per quanto riguarda le alte energie, dato che per energie considerevoli ($> 10^9$ eV) del fotone incidente il trascurare il rinculo dei nucleoni non è certamente più possibile (anche ammesso che trascurare tale rinculo sia legittimo alle basse

⁽⁴⁾ Z. KOBA, T. KOTANI e S. NAKAI: *Progr. of Theor. Phys.*, **5**, 137 (1950).

⁽⁵⁾ L. W. NORDHEIM e G. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **54**, 254 (1938); J. HAMILTON e H. W. PENG: *Proc. Roy. Ir. Soc.*, **49 A**, 197 (1944); L. L. FOLDY: *Phys. Rev.*, **76**, 372 (1949); H. FESHBACH e M. LAX: *Phys. Rev.*, **76**, 134 (1949). Soltanto in quest'ultimo lavoro sembra non si introduca l'ipotesi della massa infinita dei nucleoni. Tuttavia neppure i risultati di questi autori, che hanno fatto uso della teoria pseudoscalare-pseudovettoriale e vettoriale, non sono applicabili ai problemi qui trattati in conseguenza delle varie approssimazioni.

energie; ciò che vedremo non essere, ad esempio, assolutamente vero nel caso dell'accoppiamento pseudoscalare-pseudoscalare.

I processi in considerazione sono dunque i seguenti:

a) un fotone, urtando contro un protone, crea un mesone positivo, il protone trasformandosi in un neutrone;

b) un fotone, urtando contro un neutrone, crea un mesone negativo, il neutrone trasformandosi in un protone.

Nell'ordine più basso della teoria delle perturbazioni, che è quello eg (le perturbazioni sono $(^6)$): I) l'accoppiamento dei nucleoni col campo mesonico caratterizzato dalla costante g ; II) l'accoppiamento del campo mesonico col campo elettromagnetico, tale accoppiamento essendo associato alla carica e ; III) l'accoppiamento dei nucleoni (protoni) col campo elettromagnetico, pure caratterizzato da e) — nell'ordine più basso della teoria delle perturbazioni — il fotone incidente viene assorbito ed il processo $a)$ si vede poter avvenire attraverso i quattro stati intermedi seguenti:

Analogamente il processo *b*) può avvenire attraverso i seguenti quattro stati intermedi:

b)
$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 \xrightarrow{\text{II}} \mathbf{N}_0 + \pi^+(\mathbf{K}_0 - \pi^-) + \pi^- \xrightarrow{\text{I}} \mathbf{P}(\mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 - \pi^-) + \pi^- \\ 2) \quad \mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 \xrightarrow{\text{I}} \mathbf{P}(\mathbf{N}_0 + \omega\mathbf{K}_0 - \pi^-) + \mathbf{K}_0 + \\ \quad \quad \quad + \pi^-(-\mathbf{K}_0 + \pi^-) \xrightarrow{\text{II}} \mathbf{P}(\mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 - \pi^-) + \pi^- \\ 3) \quad \mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 \xrightarrow{\text{I}} \mathbf{P}(\mathbf{N}_0 - \pi^-) + \mathbf{K}_0 + \pi^- \xrightarrow{\text{III}} \mathbf{P}(\mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 - \pi^-) + \pi^- \\ 4) \quad \mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 \xrightarrow{\text{III}} \mathbf{N}_0 + \mathbf{P}(\mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 - \pi^-) + \\ \quad \quad \quad + \mathbf{P}^-(-\mathbf{N}_0 + \pi^-) \xrightarrow{\text{I}} \mathbf{P}(\mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 - \pi^-) + \pi^- . \end{array} \right.$$

Nelle a), b) testé scritte si è indicato con \mathbf{P} un protone di impulso \mathbf{P} , con \mathbf{N} un neutrone di impulso \mathbf{N} , con \mathbf{K}_0 il fotone incidente di impulso \mathbf{K}_0 , con π^+ un mesone positivo di impulso π^+ , con \mathbf{P}^- , π^- un protone negativo ed un mesone negativo di impulso rispettivamente \mathbf{P}^- e π^- . Una notazione del tipo $\pi^+(\mathbf{K}_0 - \pi^-)$ sta a indicare un mesone positivo di impulso $\mathbf{K}_0 - \pi^-$, ecc. I nu-

(⁶) Vedasi Appendix.

meri I, II, III, posti sulle frecce stanno ad indicare che la transizione in questione è dovuta rispettivamente all'accoppiamento mesoni-nucleoni, all'accoppiamento mesoni-campo elettromagnetico, all'accoppiamento protoni-campo elettromagnetico (7).

Mantenendo le convenzioni per i simboli usate a proposito delle *a*), *b*) (di indicare cioè un neutrone di impulso \mathbf{N} con la stessa lettera \mathbf{N} e così via) e facendo uso inoltre delle notazioni seguenti (8):

α, β :	matriei di Dirac;
M :	massa di un nucleone;
$E_p = +\sqrt{M^2 + \mathbf{p} ^2}$:	energia di un nucleone di impulso $ \mathbf{p} $;
$\mathbf{K}_0, (K_0)$:	impulso (energia) del quanto incidente; \mathbf{e}_{K_0} versore nella direzione di polarizzazione del quanto stesso; $\alpha_0 \equiv (\alpha \cdot \mathbf{e}_{K_0})$;
μ :	massa del mesone π ;
$\omega_\pi = \sqrt{\mu^2 + \mathbf{\pi} ^2}$:	energia di un mesone di impulso $\mathbf{\pi}$;
u_p :	spinore per l'onda piana di Dirac associata ad un nucleone di impulso \mathbf{p} (Gli indici relativi allo spin ed al segno dell'energia si intendono sottintesi).

Gli elementi di matrice globali relativi al processo *a*) di generazione di un mesone positivo (Mat_a) o al processo *b*) di generazione di un mesone negativo (Mat_b), si scrivono nella teoria pseudoscalare:

$$(1) \quad Mat_{a(\nu s)} = \frac{2eg}{\sqrt{2K_0}\sqrt{2\omega_{\pi^+}}} (\mathbf{e}_{K_0} \cdot \mathbf{\pi}^+) \frac{(u_{P_0}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta u_N)}{(K_0 - \omega_{\pi^+})^2 - \omega_{\pi^+ - K_0}^2} + \frac{eg}{\sqrt{2K_0}\sqrt{2\omega_{\pi^+}}} \left\{ \frac{(u_{P_0}^* \alpha_0 \Lambda_{P_0 + K_0}^+ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta u_N)}{E_{P_0} + K_0 - E_{P_0 + K_0}} + \frac{(u_{P_0}^* \alpha_0 \Lambda_{P_0 + K_0}^- \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta u_N)}{E_{P_0} + K_0 + E_{P_0 + K_0}} \right\},$$

$$(2) \quad Mat_{b(\nu s)} = - \frac{2eg}{\sqrt{2K_0}\sqrt{2\omega_{\pi^-}}} (\mathbf{e}_{K_0} \cdot \mathbf{\pi}^-) \frac{(u_{N_0}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta u_P)}{(K_0 - \omega_{\pi^-})^2 - \omega_{\pi^- - K_0}^2} + \frac{eg}{\sqrt{2K_0}\sqrt{2\omega_{\pi^-}}} \left\{ \frac{(u_{N_0}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta \Lambda_{N_0 - \pi^-}^+ \alpha_0 u_P)}{E_{N_0} - \omega_{\pi^-} - E_{N_0 - \pi^-}} + \frac{(u_{N_0}^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta \Lambda_{N_0 - \pi^-}^- \alpha_0 u_P)}{E_{N_0} - \omega_{\pi^-} + E_{N_0 - \pi^-}} \right\}.$$

(7) Una transizione quale la (4b) può, ad es., leggersi: il quanto \mathbf{K}_0 viene assorbito per effetto dell'interazione campo-elettromagnetico-protoni (III) dando luogo ad una coppia: $\mathbf{P}(\mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 - \mathbf{\pi}^-)$ e $\mathbf{P}(-\mathbf{N}_0 + \mathbf{\pi}^-)$; indi il neutrone \mathbf{N}_0 inizialmente presente dà luogo, per effetto dell'accoppiamento col campo mesonico (I), ad un protone positivo (che riempie il buco rappresentato dal \mathbf{P}^-) ed a un mesone negativo $\mathbf{\pi}^-$; restano in definitiva il mesone $\mathbf{\pi}^-$ ed il protone $\mathbf{P}(\mathbf{N}_0 + \mathbf{K}_0 - \mathbf{\pi}^-)$.

(8) Si farà sempre uso di unità in cui $\hbar = e = 1$; inoltre le (1), (2) sono scritte nel sistema di Heaviside, mentre ciò non è più per le equazioni seguenti in cui si è passati al sistema usuale (basta perciò moltiplicare tanto e quanto g per $2\sqrt{\pi}$). Infine tutto si suppone normalizzato all'unità di volume.

Nelle (1), (2) si è fatto uso dei ben noti operatori di proiezione:

$$\Lambda_{\mathbf{p}}^{\pm} = \frac{1}{2E_p} (\pm \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \pm \beta M + E_p).$$

Nel caso della teoria scalare è sufficiente per ottenere gli elementi di matrice, la sostituzione di $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta$ con β . Gli analoghi di (1) e (2) nella teoria scalare saranno nel seguito indicati, ove ciò occorra, con $Mat_{a(s)}$, $Mat_{b(s)}$ rispettivamente.

Negli elementi di matrice testè scritti il termine della prima riga (che diremo primo termine), proviene dalle transizioni 1) e 2) (degli schemi *a* o *b*), il termine della seconda riga (secondo termine) dalle transizioni 3) e 4); detto in altre parole il termine della prima riga è associato a transizioni indotte dall'accoppiamento campo mesonico-campo elettromagnetico, il termine della seconda riga è associato a transizioni indotte dall'accoppiamento protoni-campo elettromagnetico. Per ottenere la sezione d'urto per emissione di un π^+ o π^- rispettivamente, basta moltiplicare per $2\pi\rho_F$ (ρ_F = densità degli stati finali) i moduli quadrati degli elementi di matrice più sopra scritti.

Supponendo che il nucleone inizialmente presente (protone o neutrone a seconda del caso *a* o *b*) sia in quiete: $\mathbf{N}_0 = \mathbf{P}_0 = 0$; $E_{N_0} = E_{P_0} = M$, ed inoltre indicando semplicemente con $\boldsymbol{\pi}$, ω_{π} l'impulso del mesone finale e la sua energia, quale che sia il segno del mesone stesso; dicendo infine

$$E_F = M + K_0 - \omega_{\pi}$$

l'energia del nucleone (neutrone o protone a seconda del caso *a* o *b*) di rinculo; le sezioni d'urto differenziali $d\sigma_+$, $d\sigma_-$ per emissione di un mesone positivo o rispettivamente negativo di energia nell'intorno di ω_{π} , si scrivono nella teoria pseudoscalare:

$$(3) \quad d\sigma_{+(ps)} = 2\pi\rho_F \frac{2\pi^2 e^2 g^2}{K_0 \omega_{\pi} E_F} \left\{ \frac{\overline{(\mathbf{e}_{K_0} \cdot \boldsymbol{\pi})^2} (K_0 - \omega_{\pi})}{(K_0 \omega_{\pi} - |\boldsymbol{\pi}| K_0 \cos \theta)^2} - \frac{\overline{(\mathbf{e}_{K_0} \cdot \boldsymbol{\pi})^2}}{K_0 \omega_{\pi} - K_0 |\boldsymbol{\pi}| \cos \theta} \frac{1}{M} + \right. \\ \left. + \frac{M - \omega_{\pi} + |\boldsymbol{\pi}| \cos \theta}{2M^2} \right\},$$

$$(4) \quad d\sigma_{-(ps)} = 2\pi\rho_F \frac{2\pi^2 e^2 g^2}{K_0 \omega_{\pi} E_F} \left\{ \frac{\overline{(\mathbf{e}_{K_0} \cdot \boldsymbol{\pi})^2} (K_0 - \omega_{\pi})}{(K_0 \omega_{\pi} - K_0 |\boldsymbol{\pi}| \cos \theta)^2} - \right. \\ \left. - \frac{\overline{(\mathbf{e}_{K_0} \cdot \boldsymbol{\pi})^2} (2\omega_{\pi} - K_0)}{(K_0 \omega_{\pi} - K_0 |\boldsymbol{\pi}| \cos \theta) \left(M \omega_{\pi} - \frac{\mu^2}{2} \right)} + \frac{1}{2 \left(M \omega_{\pi} - \frac{\mu^2}{2} \right)^2} \times \right. \\ \left. \times \left[E_F \omega_{\pi}^2 - \omega_{\pi} |\boldsymbol{\pi}| K_0 \cos \theta - (K_0 - \omega_{\pi}) \frac{\mu^2}{2} + \omega_{\pi} |\boldsymbol{\pi}|^2 \cos^2 \theta \right] \right\},$$

e nella teoria scalare:

$$(5) \quad d\sigma_{+(s)} = 2\pi \rho_F \frac{2\pi^2 e^2 g^2}{K_0 \omega_\pi E_F} \left\{ \frac{(\mathbf{e}_{K_0} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 (2M + K_0 - \omega_\pi)}{(K_0 \omega_\pi - |\boldsymbol{\pi}| K_0 \cos \theta)^2} - \frac{(\mathbf{e}_{K_0} \cdot \boldsymbol{\pi})^2}{(K_0 \omega_\pi - K_0 |\boldsymbol{\pi}| \cos \theta) M} + \frac{M - \omega_\pi + |\boldsymbol{\pi}| \cos \theta}{2M^2} \right\},$$

$$(6) \quad d\sigma_{-(s)} = 2\pi \rho_F \frac{2\pi^2 e^2 g^2}{K_0 \omega_\pi E_F} \left\{ \frac{(\mathbf{e}_{K_0} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 (2M + K_0 - \omega_\pi)}{(K_0 \omega_\pi - |\boldsymbol{\pi}| K_0 \cos \theta)^2} + \frac{(\mathbf{e}_{K_0} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 (4M + K_0 - 2\omega_\pi)}{(K_0 \omega_\pi - K_0 |\boldsymbol{\pi}| \cos \theta) \left(M \omega_\pi - \frac{\mu^2}{2} \right)} + \frac{\left(M - \frac{\omega_\pi}{2} \right)}{2 \left(M \omega_\pi - \frac{\mu^2}{2} \right)^2} \times \right. \\ \left. \times \left[2 |\boldsymbol{\pi}| K_0 \cos \theta + \frac{|\boldsymbol{\pi}|^2 K_0}{2M - \omega_\pi} + (2M - \omega_\pi)(K_0 - \omega_\pi) + |\boldsymbol{\pi}|^2 \sin^2 \theta - |\boldsymbol{\pi}|^2 \cos^2 \theta \right] \right\},$$

avendo indicato con $(\mathbf{e}_{K_0} \cdot \boldsymbol{\pi})^2$ il valore medio del quadrato del prodotto scalare di \mathbf{e}_{K_0} con $\boldsymbol{\pi}$, che vale: $|\boldsymbol{\pi}|^2/2 \sin^2 \theta$.

Inoltre nelle (3), (4), (5), (6):

1) ρ_F è dato da:

$$(7) \quad \rho_F = \frac{|\boldsymbol{\pi}| \omega_\pi d\Omega}{(2\pi)^3} = \frac{\omega_\pi E_F}{(2\pi)^2 K_0} d\omega_\pi.$$

2) θ rappresenta l'angolo tra la direzione del quanto incidente e la direzione di emissione del mesone; le relazioni di conservazione dell'energia e dell'impulso (analogamente a quanto succede nel caso dell'effetto Compton) legano ω_π a θ :

$$(8) \quad |\boldsymbol{\pi}| K_0 \cos \theta = M(\omega_\pi - K_0) + K_0 \omega_\pi - \frac{\mu^2}{2}.$$

Le formule date precedentemente sono (nell'approssimazione *eg* della teoria delle perturbazioni) esatte, cioè nessuna approssimazione è stata fatta nella loro deduzione a partire dagli elementi di matrice (1), (2). Esse possono quindi essere applicate tanto alle basse energie del quanto incidente (cyclotrone di Berkeley) quanto alle alte energie (raggi cosmici a grandi profondità).

Prima di passare alle valutazioni numeriche delle (3), (4), (5), (6), è opportuno discutere brevemente tali formule (9).

(9) Il primo termine delle (5), (6) coincide col risultato di NORDHEIM-NORDHEIM (5) ottenuto trascurando le transizioni 3^a e 4^a associate all'interazione del fotone con i nucleoni.

Occorre anzitutto rilevare che in ciascuna delle (3), (4), (5), (6), il primo termine proviene dal modulo quadrato del primo termine degli elementi di matrice prima considerati, il secondo termine dal doppio prodotto del primo e del secondo termine in detti elementi di matrice, il terzo termine dal modulo quadrato del secondo termine negli elementi di matrice stessi; l'aver rilevato ciò è essenziale per capire l'importante differenza che si presenta, quando le formule (3) ... (6) vengano applicate al caso in cui $K_0 \ll M$, tra il caso della teoria scalare e quello della teoria pseudoscalare; mentre nel caso della teoria scalare i contributi essenziali alle sezioni d'urto provengono allora dal primo termine delle (3) ... (6) (ed in misura misure dal secondo), nel caso pseudoscalare tutti i termini danno luogo grosso modo a contributi dello stesso ordine di grandezza.

Questo diverso comportamento delle due teorie poteva facilmente prevedersi: *nel caso scalare* si ha che il campo mesonico virtuale attorno ai nucleoni è diverso da zero anche se i nucleoni si suppongono aver massa infinita, ossia si suppongono sempre fermi; perciò il fotone incidente potrà interagire tanto con questo campo mesonico virtuale quanto direttamente con i nucleoni; è chiaro che la prima interazione, caratterizzata dal primo termine delle (3) ... (6), sarà, in ragione del rapporto tra le masse del nucleone e quella del mesone, di vari ordini di grandezza superiore alla seconda, rappresentata dal terzo termine delle (3) ... (6).

Nel caso pseudoscalare l'accoppiamento tra campo mesonico e nucleoni essendo proporzionale ad $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta$, si annulla all'annullarsi della velocità dei nucleoni. Perciò il nucleone emette mesoni virtuali solo quando passa dallo stato di quiete a quello di moto ed in quantità grosso modo proporzionale alla velocità che acquista. Si ha come conseguenza che l'interazione del fotone incidente con i mesoni virtuali darà luogo ad una sezione d'urto che è dello stesso ordine di quella per interazione del fotone con i nucleoni.

Anzi notiamo che, come conseguenza di questo fatto, è da aspettarsi, in analogia ad un noto risultato di BETHE (10), che, almeno per energie del fotone incidente un po' superiori a due volte la soglia (in modo che possano essere prodotti due mesoni reali) l'approssimazione eg^2 conduca nella teoria pseudoscalare a sezioni d'urto di ordine di grandezza superiore a quello dell'approssimazione eg qui considerata.

Per quanto riguarda la questione accennata all'inizio del rapporto tra il numero dei mesoni negativi e quello dei positivi generati, le precedenti considerazioni mostrano come un ragionamento semiclassico quale quello di BRÜECKNER e GOLDBERGER (1) non sia in generale corretto in quanto sono state

(10) H. A. BETHE: *Phys. Rev.*, **76**, 190 (1949).

in esso trascurate le transizioni a stati di energia negativa; ciò non è assolutamente legittimo nel caso pseudoscalare (11).

Nella tabella I diamo i valori del rapporto in questione per un'energia $K_0 = 300$ MeV del fotone incidente e per vari angoli θ (θ essendo l'angolo tra la direzione del fotone incidente e la direzione di emissione del mesone), calcolati in base alle formule precedenti.

Nel calcolo della tab. I si è posto $M = 930$ MeV; $\mu = 150$ MeV; con R_{ps} si è indicato il rapporto tra il numero dei mesoni negativi e quello dei positivi (per u. di ang. solido nella direzione θ) per la teoria pseudoscalare, con R_s l'analogo rapporto per la teoria scalare.

TABELLA I.

θ	0°	60°	90°	150°	180°
R_{ps}	~ 1	1.4	1.67	1.9	2.17
R_s	~ 1	1.4	1.67	1.9	2.45

La cosa più notevole è che, nonostante le profonde diversità tra le due teorie, si giunga in entrambe le teorie a valori di R in accordo. Nel caso della teoria pseudoscalare, come abbiamo detto, i valori ora ottenuti possono essere

(11) Sebbene non mi sia chiara la legittimità di sostituire nel presente problema, come fanno BRUECKNER e GOLDBERGER l'operatore α con $v/(1 - v \cos \theta)$ nel caso dei nucleoni, questa asserzione non è corretta; il manoscritto del presente lavoro era già in tipografia quando, grazie alla cortesia del dott. M. CINI, sono venuto a conoscenza di un lavoro di BENOIST, PRENTKY e RATIER su questo stesso argomento comunicato al Congresso di Parigi di quest'anno e, a quanto mi risulta, non ancora pubblicato. È stato in seguito alla lettura del detto lavoro che ho potuto verificare come, in accordo con quanto accertato dagli autori francesi, la formula di BRUECKNER e GOLDBERGER possa ricavarsi anche dalle nostre (3), (4), (5), (6) tanto nel caso pseudoscalare quanto in quello scalare, cosa che mi era sfuggita a causa dell'eccessiva complicazione algebrica.

Ho potuto inoltre verificare che tutte le formule ricavate nel presente lavoro risultano in accordo con le corrispondenti degli autori francesi i quali hanno svolto i calcoli anziché con la teoria delle perturbazioni standard, col più conciso metodo di FEYNMAN (*Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949)).

In conseguenza di quanto ora detto le tabelle I e II (vedi oltre) potevano essere calcolate direttamente dalla formula di BRUECKNER e GOLDBERGER ed è inutile distinguere in esse tra teoria scalare e pseudoscalare in quanto entrambe danno esattamente lo stesso risultato; le leggerissime discrepanze tra la prima e la seconda riga di dette tabelle e il fatto che i valori numerici colà riportati differiscono di qualche per cento da quelli ricavabili in base alla formula di BRUECKNER e GOLDBERGER sono da imputarsi ad alcune approssimazioni numeriche compiute a partire dalla (3), (4), (5), (6).

confrontati con quelli ricavati da KOBA e coll. (4); l'accordo è ottimo. E piuttosto buono è l'accordo con l'esperienza ($R_{\text{sper}} = 1,35 \pm 0,15$ per $\theta = 90^\circ$).

Le formule testé ricavate (3) ... (6) possono essere applicate al campo delle alte energie del fotone incidente; in tal caso, anche per la teoria scalare, i termini provenienti dal rinculo dei nucleoni hanno importanza essenziale.

A proposito delle alte energie del fotone incidente è conveniente fare alcune osservazioni. Anzitutto, come è stato già osservato, nella teoria pseudoscalare è presumibile che, non appena l'energia del quanto diventi tale che due mesoni possono essere prodotti, l'approssimazione eg^2 sia più importante della eg . Nel caso della teoria scalare ciò non dovrebbe succedere, ma nulla si può dire senza ulteriore esame. In secondo luogo, contrariamente a quello che si potrebbe sulle prime pensare, se si ha a che fare con nuclei complessi anziché con nucleoni isolati è assai dubbio se le formule qui ricavate possano essere utilmente utilizzate nel caso di grandi K_0 ($\gg M$). Infatti, non appena il rinculo del nucleone che emette il mesone avviene con energia $> \mu$, comincia ad intervenire in maniera più che apprezzabile la generazione di mesoni da parte del detto nucleone; ciò che rende probabilmente inutilizzabile sin dall'inizio una trattazione in cui si riguardano i nucleoni all'interno del nucleo come liberi.

Premesse queste limitazioni, diamo i rapporti R tra i numeri di mesoni negativi e di mesoni positivi per i due valori di K_0 : $K_0 = 3 \text{ GeV}$ e $K_0 = 10 \text{ GeV}$ e per vari angoli:

TABELLA II.

$K_0 = 3 \text{ GeV}$				$K_0 = 10 \text{ GeV}$		
	$\theta = 0^\circ$	90°	180°	$\theta = 0^\circ$	90°	180°
R_{ps}	~ 1	18	42	~ 1	123	282
R_{sc}	~ 1	18	49	~ 1	123	282

Come si vede il rapporto R tanto nella teoria pseudoscalare quanto nella scalare dà valori assai prossimi all'unità che ha per piccoli angoli diventa assai grande per angoli dell'ordine di 90° .

Questo fatto è tuttavia meno impressionante di quello che può sembrare a prima vista; infatti man mano che l'energia del fotone incidente cresce, dato che le energie maggiori del mesone emesso (\sim pari a K_0) si hanno per $\theta \approx 0^\circ$ come mostra la (8), il fattore ϱ_F diventa assai grande per i piccoli angoli ed assai piccolo per i grandi, di modo che questi ultimi contribuiscono in effetti abbastanza poco, cosa del resto comune a quest'ordine di problemi; ciò può

essere visto dalla tabella seguente in cui abbiamo riportato in corrispondenza di ciascun angolo numeri proporzionali alla sezione d'urto per unità di angolo solido nell'angolo considerato; ci siamo limitati nella tabella seguente al solo caso pseudoscalare:

TABELLA III.

$\theta =$	0°		45°	90°	180°
$K_0 = 3 \text{ GeV}$	$d\sigma_+$	30	2,9	0,44	0,16
	$d\sigma_-$	30	11,4	7,9	6,8
$K_0 = 10 \text{ GeV}$	$d\sigma_+$	100	0,635	0,07	0,016
	$d\sigma_-$	100	15,2	8,3	4,6

Una valutazione grossolana a partire dalla tab. IV mostra, ad esempio, che per $K_0 = 10 \text{ GeV}$ il rapporto tra le sezioni d'urto *totali* per produzione di un negativo e di un positivo è dell'ordine di 1,7.

Riferendoci nuovamente alle basse energie del quanto incidente, una parola infine sulle distribuzioni angolari dei mesoni emessi (indipendentemente dal segno della loro carica) in relazione alle esperienze di Berkeley. Gli autori giapponesi più volte citati, in base forse ad informazioni premature sui dati sperimentali osservavano come la teoria pseudoscalare non desse il risultato giusto per tale distribuzione, per risultato giusto intendendo essi in base alle loro premature informazioni, una distribuzione in $\sin^2 \theta$, quale sostanzialmente risulta dalla teoria scalare. D'altra parte più recenti risultati ⁽²⁾ sembrerebbero mostrare che invece la distribuzione angolare non si accorda con la teoria scalare essendo invece in buon accordo con quella pseudoscalare. Fino a che il materiale sperimentale non sarà più abbondante la questione non potrà essere risolta. È da tener presente in ogni caso che, il legame nucleare può avere un'influenza apprezzabile sulla distribuzione angolare. Ciò è mostrato indirettamente dalle sopraccennate esperienze di Berkeley; infatti secondo tali esperienze il rapporto tra il numero complessivo di mesoni generati da fotoni di $\sim 300 \text{ MeV}$ in H ed in C risulta essere non già dell'ordine di 1 a 6 quale sarebbe se i nucleoni fossero liberi, ma dell'ordine di 1 a 2,5. Ciò può interpretarsi ragionando come segue ⁽¹²⁾: poichè l'energia di rinculo dei nucleoni è dell'ordine dell'energia cinetica media dei nucleoni nell'interno del nucleo, alcune transizioni sono vietate dal principio di Pauli; ora l'energia dei nucleoni di rinculo varia al variare di θ , di modo che le proibizioni imposte

⁽¹²⁾ L'importanza del principio di Pauli in quest'ordine di questioni è stata fatta rilevare da B. FERRETTI: *Phys. Soc. Camb. Rep.* (1947); H. FESHBACH e M. LAX ⁽⁵⁾.

dal principio di Pauli, varieranno al variare di θ alterando con ciò la distribuzione angolare dei mesoni quale sarebbe se i nucleoni fossero liberi.

Sono grato al prof. B. FERRETTI per numerose utili discussioni sull'argomento di questo lavoro.

APPENDICE (13)

Le densità di Hamiltoniana di interazione tra i vari campi risultano notoriamente (14) essere nella teoria pseudoscalare (specializzate al caso che ci interessa):

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \mathcal{H}_I = g(\Phi_P^*(\mathbf{x})\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta\Phi_N(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) - \Phi_N^*(\mathbf{x})\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta\Phi_P(\mathbf{x})\Psi^*(\mathbf{x})) , \\ \text{(II)} \quad \mathcal{H}_{II} = ie\mathbf{A}_{tr}(\mathbf{x}) \cdot (\Psi^*(\mathbf{x}) \text{ grad } \Psi(\mathbf{x}) - \Psi(\mathbf{x}) \text{ grad } \Psi^*(\mathbf{x})) , \\ \text{(III)} \quad \mathcal{H}_{III} = -e\Phi_P^*(\mathbf{x})\alpha \cdot \mathbf{A}_{tr}(\mathbf{x})\Phi_P(\mathbf{x}) . \end{array} \right.$$

Nella teoria scalare \mathcal{H}_{II} ed \mathcal{H}_{III} restano le stesse ed \mathcal{H}_I va sostituita con:

$$g(\Phi_P^*(\mathbf{x})\beta\Phi_N(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) + \Phi_N^*(\mathbf{x})\beta\Phi_P(\mathbf{x})\Psi^*(\mathbf{x})) .$$

Le (I), (II), (III) rappresentano:

1) l'interazione tra il campo mesonico carico (caratterizzato dagli operatori di campo $\Psi(\mathbf{x})$, $\Psi^*(\mathbf{x})$) ed il campo nucleonico (caratterizzato dagli operatori-spinori $\Phi_P(\mathbf{x})$, $\Phi_N(\mathbf{x})$ rispettivamente riferentisi a protoni e neutroni); g è la costante di accoppiamento per la ora detta interazione;

2) l'interazione tra il campo elettromagnetico trasversale (caratterizzato dall'operatore potenziale vettore trasversale $\mathbf{A}_{tr}(\mathbf{x})$) e la corrente mesonica;

3) l'interazione tra il campo elettromagnetico e la corrente protonica.

Introduciamo operatori di creazione ed annichilamento per i vari campi, definiti dagli sviluppi di Fourier:

A) Per il campo mesonico:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\pi} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\pi}}} (a_{\pi} + b_{\pi}^*) \exp [i\pi \cdot \mathbf{x}] , \\ \Psi^*(\mathbf{x}) = \sum_{\pi} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\pi}}} (a_{\pi}^* - b_{\pi}) \exp [-i\pi \cdot \mathbf{x}] , \end{array} \right. \quad (\omega_{\pi} = \sqrt{|\pi|^2 + \mu^2}) .$$

Nelle (10) a_{π} , a_{π}^* rappresentano gli operatori rispettivamente di creazione e di annichilamento di un mesone positivo di impulso π , b_{π} , b_{π}^* gli operatori rispettivamente di creazione e di annichilamento di un mesone negativo di impulso $-\pi$.

Gli operatori in questione soddisfano alle seguenti regole di commutazione:

$$[a_K, a_{K'}^*]_- = [b_K, b_{K'}^*]_- = \delta_{KK'} , \quad [a_K, a_{K'}]_- = \text{etc.} = 0 .$$

(13) Le notazioni non esplicitamente chiarite sono quelle già introdotte nel testo.

(14) Vedasi, ad es., S. M. DANCOFF e S. D. DRELL: *Phys. Rev.*, **76**, 205 (1949).

B) Per il campo nucleonico (15):

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_P(\mathbf{x}) = \sum_{ps} d_{ps}^+ u_{ps}^+ \exp [i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}], & \Phi_P^*(\mathbf{x}) = \sum_{ps} d_{ps}^{+*} u_{ps}^{+*} \exp [-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}], \\ \Phi_N(\mathbf{x}) = \sum_{ps} d_{ps}^- u_{ps}^- \exp [i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}], & \Phi_N^*(\mathbf{x}) = \sum_{ps} d_{ps}^{-*} u_{ps}^{-*} \exp [-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}]. \end{array} \right.$$

Nelle (11) d_{ps}^+ , d_{ps}^{+*} sono rispettivamente operatori di creazione e di annichilamento per un protone di impulso \mathbf{p} ed in uno stato di energia e di spin caratterizzato dall'indice s ; d_{ps}^- , d_{ps}^{-*} sono le grandezze analoghe per il neutrone; u_{ps}^+ , u_{ps}^- sono le ampiezze di Dirac relative ad un protone e ad un neutrone in uno stato \mathbf{p} , s ; u_{ps}^{+*} , u_{ps}^{-*} i complessi coniugati di tali ampiezze. Gli operatori d^+ , d^- soddisfano alle regole di commutazione di Jordan-Wigner:

$$[d_{ps}, d_{p'\sigma}^*]_+ = \delta_{p\sigma} \delta_{p'\sigma}, \quad [d_{ps}^+, d_{p'\sigma}^+]_+ = [d_{ps}^{+*}, d_{p'\sigma}^{+*}]_+ = 0.$$

C) Per il campo elettromagnetico (16):

$$(12) \quad \mathbf{A}_{tr}(\mathbf{x}) = \sum_{K\pi} \sqrt{\frac{1}{2K}} \mathbf{e}_K^{(r)} (c_K^{(r)} + c_{-K}^{(r)*}) \exp [i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}].$$

Nella (12) $c_K^{(r)}$, $c_K^{(r)*}$ sono rispettivamente operatori di creazione e annichilamento di un fotone di impulso \mathbf{K} . I c_K soddisfano alle regole di commutazioni seguenti:

$$[c_K^{(r)}, c_{K'}^{(r)*}]_- = \delta_{KK'} \delta_{rr'} \quad [c_K^{(r)}, c_{K'}^{(r')}]_- = \text{etc.} = 0.$$

Integrando le (9) a tutto lo spazio e facendo uso delle (10), (11), (12) le perturbazioni vengono a riscriversi nel caso pseudoscalare:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(I)} & H_I = g \sum_{ps, p'\sigma} (u_{ps}^{+*} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta u_{p'\sigma}^-) d_{ps}^+ d_{p'\sigma}^+ \sqrt{\frac{1}{2\omega_{p-p'}}} (a_{p-p'} + b_{p-p'}^*) - \\ & - g \sum_{ps, p'\sigma} (u_{ps}^{-*} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta u_{p'\sigma}^+) d_{ps}^- d_{p'\sigma}^+ \sqrt{\frac{1}{2\omega_{p'-p}}} (a_{p'-p}^* + b_{p'-p}), \\ \text{(II)} & H_{II} = -2e \sum_{K\pi} \sqrt{\frac{1}{2K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_\pi}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\pi+K}}} (c_K + c_{-K}^*) (\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{\pi}) \times \\ & \times [a_\pi a_{\pi+K}^* + a_\pi b_{\pi+K} + b_\pi^* a_{\pi+K} + b_\pi^* b_{\pi+K}], \\ \text{(III)} & H_{III} = -e \sum_{ps, \sigma, K} \sqrt{\frac{1}{2K}} (c_K + c_{-K}^*) (u_{ps}^{+*} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{e}_K) u_{p-K, \sigma}^+) d_{ps}^{+*} d_{p-K, \sigma}^+. \end{array} \right.$$

(15) Alcuni degli indici sono stati sottintesi nelle formule del testo.

(16) L'indice di polarizzazione r è stato sottinteso nelle formule del testo come pure nella seguente (13).

Si vede facilmente di conseguenza che le possibili transizioni indotte da queste perturbazioni sono effettivamente quelle date nel testo; e si possono agevolmente costruire, tenendo presente che un protone negativo di impulso \mathbf{p} si comporta come un protone positivo di impulso $-\mathbf{p}$, gli elementi di matrice (1), (2) per il processo in questione.

S U M M A R Y

In connection with the experiences at Berkeley about the production of mesons by photons, the differential cross section for the process has been calculated in the first approximation (*eg*) of perturbation theory; use has been made of the pseudoscalar theory with pseudoscalar coupling and scalar theory with scalar coupling. Contrarily to past work on the subject we have taken into account also the recoil of nucleons: we show that this is always essential for high energies of the impinging photon; moreover it is essential also for low energies of the photon in the pseudoscalar theory. In particular we examine the problem of the ratio between the numbers of positive and negative mesons emitted; we conclude that both with the pseudoscalar theory, (as already established by KOBA and coworkers), and the scalar theory this ratio comes out to be equal and in good agreement with experience; the differential cross-sections themselves are however different in the two theories. For high energies ($\gg M$) of the photon the ratio negative to positive is of the order unity at 0° (with respect to the direction of the impinging photon), but varies very rapidly with the angle. For example for an energy of the photon of 10 GeV and angle of 90° this ratio is ~ 120 . However the ratio between the *total* cross-sections for the production of a negative and a positive meson is of the order 2.

Sulla componente elettronica della radiazione cosmica.

P. BUDINI

Istituto di Fisica dell'Università - Trieste

(ricevuto il 29 Luglio 1950)

Riassunto. — Si calcola l'intensità verticale della componente elettronica nell'ipotesi che essa abbia origine unicamente dai quanti γ generati nel decadimento dei mesoni π neutri prodotti nelle esplosioni nucleari in alta atmosfera. Si sviluppano i calcoli analitici basandosi su ipotesi comuni a tutte le attuali teorie sulla generazione dei mesoni. Si specializzano le forme finali e si eseguono dei calcoli numerici, approssimati, nel caso della produzione multipla alla Oppenheimer e più esatti nel caso della produzione plurima.

1. — Il fatto che la radiazione cosmica che arriva al limite dell'atmosfera sia, in massima parte, costituita da nucleoni sembra ormai abbastanza certo: esistono tuttavia diversi modelli ⁽¹⁾ teorici plausibili sul modo in cui questi nucleoni interagendo coi nuclei dell'aria, danno luogo alla componente fotoelettronica della radiazione cosmica nella media ed alta atmosfera. Uno di questi, particolarmente importante perchè in relazione col modello simmetrico delle forze nucleari, suggerisce che l'origine della componente fotoelettronica sia da ricercarsi nel decadimento dei mesoni π neutri generati nelle esplosioni nucleari. L'ipotesi dell'esistenza del mesone π neutro e del fatto che esso dopo un tempo dell'ordine di 10^{-13} sec decada in due quanti γ è ormai corroborata da diverse osservazioni sperimentalistiche, quali quelle recenti di BERKLEY ⁽²⁾ o quelle sulle stelle giganti ⁽³⁾.

⁽¹⁾ SATIO HAYAKAWA: *Phys. Rev.*, **75**, 1759 (1949); J. ASHIN e R. E. MARSHAK: *Phys. Rev.*, **76**, 59 (1949); L. I. SHIFF: *Phys. Rev.*, **76**, 89 (1949); H. W. LEWIS, J. R. OPPENHEIMER e S. A. WOUTHUYSEN: *Phys. Rev.*, **73**, 127 (1948).

⁽²⁾ B. JORKLAND: in pubblicazione; ASHKIN: *Colloquio di Parigi*, giugno 1950.

⁽³⁾ R. E. MARSHAK: *Phys. Rev.*, **76**, 1736 (1949); H. L. BRADT, M. F. KAPLON e B. PETERS: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 28 (1950).

Scopo del presente lavoro è di vedere se la componente elettronica della radiazione cosmica, quale risultante dalle osservazioni sperimentalistiche, possa esser attribuita al decadimento dei mesoni π neutri e, in caso affermativo, di quanta parte della componente elettronica questo particolare processo possa esser responsabile.

2. – Sul meccanismo di irraggiamento dei mesoni nell'urto di un nucleone con un nucleo, sono state emesse varie teorie, che si possono classificare in due gruppi: quelle che ammettono la produzione multipla⁽⁴⁾ e quelle che ammettono la produzione plurima⁽⁵⁾ di mesoni. Tutte le teorie si trovano tuttavia d'accordo nell'ammettere le seguenti due ipotesi:

a) che la sezione d'urto totale per l'irraggiamento del campo nucleare sia circa uguale a quella geometrica e costante al di sopra di una certa energia dell'ordine di alcuni GeV e, al di sotto di tale limite tenda più o meno rapidamente a zero;

b) che l'energia media persa dal nucleone nell'urto radiativo sia una frazione costante della sua energia iniziale.

Queste due sole ipotesi hanno per conseguenza che se, come comunemente si ammette, la radiazione cosmica al limite dell'atmosfera è costituita da nucleoni obbedienti ad uno spettro energetico di potenza (per energie maggiori dell'energia del taglio di latitudine E_0) allora questa componente viene assorbita esponenzialmente in materia nucleare omogenea mentre lo spettro di potenza si conserva.

La dimostrazione di questo asserito la si può fare facilmente seguendo la linea adottata dall'HÖCKER⁽⁶⁾, il quale suppone altresì che nell'urto dei due nucleoni una frazione costante dell'energia del primario vada suddivisa con uguale probabilità tra il nucleone urtante e quello urtato.

Ora se l'assorbimento è esponenziale in materia nucleare tale sarà pure in materia ordinaria, come dimostrato da HEITLER e JANOSSY⁽⁵⁾. Assumeremo pertanto che allo spessore t misurato in unità di radiazione lo spettro differenziale energetico della componente nucleonica viaggiante con angolo zenitale θ sia:

$$(1) \quad N(E, t, \theta) = J_0 \frac{\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \exp [-\lambda t / \cos \theta]$$

e λ lo desumeremo dai dati sperimentali.

⁽⁴⁾ G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **74**, 975 (1948); J. R. OPPENHEIMER *et al.*: *Phys. Rev.*, **73**, 127 (1948); W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.*, **126**, 573 (1949).

⁽⁵⁾ W. HEITLER e P. WALSH: *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 252 (1945); W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, **A 42**, 374 (1949).

⁽⁶⁾ C. H. HÖCKER: *Zeits. f. Phys.*, **124**, 351 (1947).

3. - La teoria che le recenti esperienze di BERKLEY confermano, ascrive al mesone π neutro una vita media dell'ordine di 10^{-13} s. Ai fini del calcolo sarà quindi lecito supporre che i quanti gamma vengono emessi direttamente nelle esplosioni nucleari. Avremo cioè che ogni primario genererà un certo numero di quanti gamma contenuti in un certo cono con vertice nel luogo dell'urto e asse la direzione di provenienza del primario, di modo che alla intensità verticale della componente γ contribuiranno quanti generati da nucleoni di tutte le direzioni di provenienza; precisamente se $\varphi(E, w, \theta)$ è la sezione d'urto differenziale per il nucleo d'aria per la creazione da parte di un nucleo di energia E di un quanto gamma di energia w in direzione facente un angolo θ con quella di provenienza del primario, t_0 il libero cammino medio del nucleone nell'aria; il numero di fotoni di energia emessi w a quota t nell'unità d'angolo solido in direzione verticale da parte di nucleoni di energia E e angolo zenitale θ sarà:

$$\frac{1}{t_0} N(E, \theta, t) \varphi(E, w, \theta)$$

e integrando rispetto a θ e rispetto all'energia dei nucleoni otterremo lo spettro dell'intensità verticale dei fotoni emessi nelle esplosioni alla quota t :

$$(2) \quad g(w, t) = \frac{2\pi}{t_0} \int_{E(w)}^{\infty} dE \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(E, \theta, t) \varphi(E, w, \theta) \sin \theta d\theta$$

dove $E(w)$ l'energia minima concessa a un nucleone per potere creare un fotone di energia w . Se E_c è l'energia di soglia degli urti radiativi sarà:

$$E(w) \leq E_c \quad \text{per } w \ll \frac{E_c}{2}$$

$$E(w) \leq 2w \quad \text{per } w \gg \frac{E_c}{2}.$$

Se $N(E, \theta, t)$ si può considerare indipendente da θ cioè isotropo per quei valori di θ per i quali $\varphi(E, w, \theta)$ è sensibilmente diverso da 0, allora:

$$(3) \quad g(w, t) = \frac{2\pi}{t_0} \int_{E(w)}^{\infty} N(E, t) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(E, w, \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{t_0} \int_{E(w)}^{\infty} N(E, t) \Phi(E, w) dw.$$

Dove $\Phi(E, w)$ è la sezione d'urto per la creazione di quanti gamma per nucleo d'aria indipendentemente dall'angolo di emissione. La (3) mostra che qualora e fino a quando la primaria nucleonica si possa considerare isotropa, l'intensità verticale dei fotoni generati in esplosioni nucleari da parte di nucleoni di qualsiasi direzione di provenienza è uguale a quella che si avrebbe se in ogni esplosione tutti i fotoni venissero emessi nella medesima direzione del nucleone incidente, e se alla intensità verticale dei fotoni contribuisse la

sola componente verticale della radiazione nucleonica generatrice. In altre parole il problema della generazione di una radiazione secondaria da una data primaria si può trattare, senza commettere errori, unidimensionalmente finché la primaria è isotropa entro angoli zenithali minori o uguali a quello massimo di creazione della radiazione secondaria.

Nel nostro caso, siccome la radiazione primaria nucleonica di energia sufficiente per irridiare mesoni arriva isotropicamente al limite dell'atmosfera e la generazione dei mesoni e quindi anche dei fotoni avviene principalmente nei primi strati dell'atmosfera, ci sembra lecito trattare, in un primo tempo, il problema unidimensionalmente, riservandoci di apportare ai risultati finali delle correzioni che tengano conto dell'effetto di anisotropia della primaria (vedi appendice).

4. — Nelle nostre ipotesi abbiamo dunque che il numero medio $g(w, \tau) d\tau$ di fotoni di energia w generati nello spessore $\tau, \tau + d\tau$, sarà:

$$(4) \quad g(w, \tau) d\tau = \exp[-\lambda\tau] \frac{d\tau}{t_0} \int_{E(w)} J_0 \frac{\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \Phi(E, w) dE.$$

Questi fotoni daranno origine a cascate di elettroni e fotoni i cui spettri saranno evidentemente proporzionali a $\exp[-\lambda\tau] d\tau$; essi, ad una quota situata t' unità di radiazione al di sotto di τ avranno espressioni tipo:

$$(5) \quad \begin{cases} \exp[-\lambda\tau] p(E, t') d\tau; \\ \exp[-\lambda\tau] g(w, t') d\tau; \\ \exp[-\lambda\tau] P(E, t') d\tau; \end{cases}$$

delle quali la prima indica lo spettro differenziale elettronico, la seconda quello fotonico e la terza quello integrale elettronico; $p(E, t')$ e $g(w, t')$ si dovranno calcolare risolvendo le classiche espressioni della cascata con le condizioni al limite:

$$(6) \quad \begin{cases} p(E, 0) = 0 \\ g(w, 0) = \frac{1}{t_0} \int_{E(w)}^{\infty} J_0 \frac{\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \Phi(E, w) dE. \end{cases}$$

Per il calcolo di $p(E, t')$ e $g(E, t')$ indicheremo con

$$(7) \quad M_0(s) = \int_0^{\infty} w^s g(w, 0) dw,$$

la trasformata di Mellin $g(w, 0)$. È noto (7) che le equazioni di diffusione della

(7) B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

eascata per le trasformate di Mellin di $p(E, t')$ e $g(E, t')$, che indicheremo rispettivamente con $M_p(s, t')$ e $M_g(s, t')$, sono:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial M_p(s, t')}{\partial t'} = -A(s)M_p(s, t') + B(s)M_g(s, t') \\ \frac{\partial M_g(s, t')}{\partial t'} = C(s)M_p(s, t') - \sigma_0 M_g(s, t') \end{cases}$$

dove $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$, sono funzioni note e tabulare nel lavoro di B. Rossi e K. GREISEN (?), e $\sigma_0 = 0,773$. Queste, risolte con le nostre condizioni ai limiti danno:

$$(9) \quad \begin{cases} M_p(s, t') = \frac{M_0(s)}{C(s)} \frac{[\sigma_0 + \lambda_1(s)][\sigma_0 + \lambda_2(s)]}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \{ \exp[\lambda_1(s)t'] - \exp[\lambda_2(s)t'] \} \\ M_g(s, t') = -\frac{M_0(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \{ [\sigma_0 + \lambda_2(s)] \exp[\lambda_1(s)t'] - [\sigma_0 + \lambda_1(s)] \exp[\lambda_2(s)t'] \} \end{cases}$$

dove $\lambda_1(s)$ e $\lambda_2(s)$ sono funzioni note e tabulate nel citato lavoro.

Per conservare un carattere di generalità al nostro lavoro, non vogliamo a questo stadio dei calcoli fare ipotesi particolari sulla $g(w, 0)$ e quindi sulla $M_0(s)$; d'altra parte il fatto sperimentalmente assodato che lo spettro mesonico per le alte energie è prossimo ad uno spettro di potenza e per il fatto che questo spettro rispecchierà nelle sue caratteristiche essenziali quello di produzione dei mesoni e quindi dei fotoni di alta energia, si può affermare che in ogni caso la $g(w, 0)$ avrà per grandi valori di w una forma asintotica del tipo:

$$\frac{\text{costante}}{w^{n+1}},$$

con n compreso tra 1 e 3. Ciò significa che la $M_0(s)$ e quindi la M_p e M_g divergono per s maggiore di n . M_p e M_g tendono ancora all'infinito per s tendente a 0 dove $\lambda_1(s)$ diventa infinita. La striscia di convergenza di M_p e M_g è quindi compresa tra 0 e n . Entro tale striscia esse hanno sull'asse reale un acuto minimo al quale corrisponde sull'asse immaginario un acuso massimo; ciò assicura che le (9) sono antitrasformabili in ogni caso col noto metodo della sella. Si ottiene così, omettendo il contributo trascurabile di $\exp[\lambda_2(s)t']$:

$$(10) \quad \begin{cases} p(E, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{s} M(s) M_0^{(s)}}{\sqrt{\lambda_1''(s)t' - \frac{1}{2s^2} + \frac{M_0''M_0 - M_0'^2}{M_0^2}}} E^{-(s+1)} \exp[\lambda_1(s)t'] \\ t' = \frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[\log E - \frac{1}{2s} - \frac{M_0'(s)}{M_0(s)} \right] \end{cases}$$

$$(10') \quad \begin{cases} g(w, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{H_2(s)}{\sqrt{\lambda_1''(s)t' + \frac{M_0''M_0 - M_0'^2}{M_0^2}}} w^{-(s+1)} \exp [\lambda_1(s)t'] \\ t' = \frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[\log w - \frac{M_0'(s)}{M_0(s)} \right]. \end{cases}$$

dove $M(s)$ e $H_2(s)$ sono funzioni note e tabulate nel citato lavoro (7).

Per calcolare $P(E, t')$ basta ricordare che

$$M_P(s-1) = \frac{1}{s} M_p(s)$$

si ottiene:

$$(10'') \quad \begin{cases} P(s, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{M(s)M_0(s)}{\sqrt{\lambda_1''(s)t' + \frac{1}{2s^2} + \frac{M_0''M_0 - M_0'^2}{M_0^2}}} E^{-s} \exp [\lambda_1(s)t'] \\ t' = \frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[\log E + \frac{1}{2s} - \frac{M_0'(s)}{M_0(s)} \right]. \end{cases}$$

Per ottenere infine gli spettri differenziali elettronici $\pi(E, t)$ e fotonico $\gamma(w, t)$ e integrale elettronico $\Pi(E, t)$ complessivi di quota t , sarà sufficiente integrare le (5) rispetto a τ da zero a t ; osservando che $t' = t - \tau$ si ottiene:

$$(11) \quad \begin{cases} \pi(E, t) = \int_0^t \exp [-\lambda\tau] p(E, t - \tau) d\tau = \exp [-\lambda t] \int_0^t \exp [\lambda\tau] p(E, \tau) d\tau \\ \gamma(w, t) = \int_0^t \exp [-\lambda\tau] g(E, t - \tau) d\tau = \exp [-\lambda t] \int_0^t \exp [\lambda\tau] g(w, \tau) d\tau \\ \Pi(E, t) = \int_0^t \exp [-\lambda\tau] P(E, t - \tau) d\tau = \exp [-\lambda t] \int_0^t \exp [\lambda\tau] P(E, \tau) d\tau. \end{cases}$$

Espressioni valide per energie maggiori dall'energia critica E_j .

5. - Per quanto affermato sopra, noi intendiamo occuparci di quella parte della componente molle che discende dai fotoni di disintegrazioni dei mesoni neutri; l'energia minima di questi fotoni sarà circa uguale alla metà della energia di riposo dei mesoni π neutri, cioè dell'ordine dell'energia critica nell'aria; supporremo pertanto che al di sotto di questa energia non ci sia generazione diretta di componente molle ma solo prodotti delle cascate iniziate dai fotoni di più alta energia. Per il computo del numero di elettroni di bassa energia sarà dunque lecito adottare il criterio di ARLEY (8), cioè supporre che

(8) N. ARLEY: *Proc. Roy. Soc., A 168*, 519 (1938).

al di sotto dell'energia critica E_j un elettrone non irradia più ma perda energia solo per ionizzazione, e quindi l'energia che perde sia proporzionale al tratto percorso; e siccome l'energia critica E_j è per definizione l'energia perduta in un'unità di radiazione, gli elettroni di energia $\varepsilon < E_j$ avranno attraversato dal momento in cui avevano l'energia E_j una frazione δ di unità di radiazione data da:

$$\delta = 1 - \frac{\varepsilon}{E_j} ;$$

allora per $\varepsilon < E_j$:

$$\pi(\varepsilon, t) = \pi(E_j, t - \delta) ,$$

e il numero complessivo di elettroni aventi energia maggiore di ε sarà dato da:

$$(12) \quad N(\varepsilon, t) = \Pi(E_j, t) + \int_{t-\delta}^t \pi(E_j, t') dt' .$$

Per il calcolo, siccome l'intervallo di integrazione è minore di un'unità di radiazione si può scrivere la precedente ⁽⁹⁾:

$$(13) \quad N(\varepsilon, t) = \Pi(E_j, t) + \pi \left(E_j, t - \frac{E_j - \varepsilon}{2E_j} \right) (E_j - \varepsilon) .$$

6. - Le considerazioni svolte sono applicabili ai risultati di tutte le particolari teorie finora enunciate sulla generazione dei mesoni negli urti nucleari. Da queste teorie solitamente si deduce la probabilità $\psi(E, \xi) d\xi$ che in un urto di un nucleone di energia E venga emesso un mesone di energia compresa tra ξ e $\xi + d\xi$. Se si accetta il modello simmetrico per le forze nucleari e se si suppone che ogni mesone π neutro si disintegri in due fotoni ⁽¹⁰⁾ di uguale energia ed impulso opposto, si ottiene che la probabilità che nel detto urto venga emesso un fotone di energia compresa tra w e $w + dw$, cioè la $\Phi(E, w)$ delle nostre formule si otterrà in prima approssimazione dalla $\psi(E, \xi)$ mediante la:

$$(14) \quad \Phi(E, w) = \frac{4}{3} \psi(E, 2w) ;$$

questa introdotta nella (6) ci darà lo spettro energetico di produzione dei

⁽⁹⁾ Si dimostra che questa approssimazione è equivalente a quella adottata in caso analogo da W. HEISENBERG (*Cosmic Radiation*, pag. 25, formula (73)).

⁽¹⁰⁾ In base alla recente relazione di ASHKIN ⁽²⁾ risulta che i quanti possono esser generati anche da mesoni π negativi in processi del tipo $\pi^- + P \rightarrow N + \gamma$ e $\pi^- + P \rightarrow N + \pi^0 \rightarrow N + 2\gamma$. La frequenza di questi rispetto a quelli generati nel decadimento dei neutretti è tuttavia dell'ordine del rapporto delle costanti di accoppiamento g ed e ; li trascureremo pertanto in questo lavoro.

fotoni $g(w, 0)$. Dall'esame della (6) si riconosce allora che se la teoria ci fornisce direttamente lo spettro di produzione dei mesoni allora da questo si può passare allo spettro di produzione dei fotoni $g(w, 0)$ con una formula perfettamente simile alla (14). Vogliamo ora dedurre gli spettri che si ottengono partendo dagli spettri di produzione dei mesoni dedotti da teorie particolari.

7. — Accontentandoci, in un primo tempo di una valutazione alquanto approssimativa, poniamo, similmente a quanto fatto da OPPENHEIMER (4) che ogni nucleone di energia E , enl'urto contro nucleo, emetta un numero

$$(15) \quad n = KE^q$$

di mesoni π di uguale energia nel sistema terrestre. Nella (15) K e q sono costanti. Si deduce allora facilmente (v. OPPENHEIMER (4)) che lo spettro energetico $R(\xi)$ dei mesoni emessi dalla componente nucleonica nello spessore dt è, a meno del fattore $\exp[-\lambda t]$, della forma:

$$R(\xi) d\xi = A \xi^{[2q-(\gamma+1)]/(1-q)} d\xi.$$

Se si ammette che la (15) sia valida anche per le basse energie si ottiene:

$$(16) \quad A = \frac{E_c^{q(\gamma-1)/(1-q)}}{t_0(1-q)} J_0 \gamma E_\lambda^\gamma K^{(\gamma-q)/(1-q)},$$

Per quanto osservato al precedente numero abbiamo allora che lo spettro energetico di emissione dei fotoni sarà:

$$(17) \quad g(w, 0) = \frac{B}{w^{n+1}},$$

con

$$B = \frac{(4/3)A}{2^{n+1}} \quad \text{e} \quad n = \frac{-2q + (\gamma + 1)}{1 - q} - 1,$$

la cui trasformata di Mellin è:

$$M_0(s) = \frac{B}{n - s}.$$

In questo caso non è conveniente adottare il metodo della sella, infatti le $M_p(s, t')$ e $M_g(s, t')$ hanno un polo semplice per $s = n$ e sono analitiche nel semipiano a destra della retta $s = n$ di modo che le funzioni p e g si possono ricavare come residui della (9) al detto polo; si ottiene:

$$p(E, t') = \frac{B}{E^{n+1}} \frac{[\sigma_0 + \lambda_1(n)][\sigma_0 + \lambda_2(n)]}{C(n)[\lambda_1(n) - \lambda_2(n)]} \{ \exp[\lambda_1(n)t'] - \exp[\lambda_2(n)t'] \},$$

$$g(w, t') = \frac{B}{w^{n+1}} \frac{1}{\lambda_2(n) - \lambda_1(n)} \{ [\sigma_0 + \lambda_2(n)] \exp[\lambda_1(n)t'] - [\sigma_0 + \lambda_1(n)] \exp[\lambda_2(n)t'] \},$$

che, poste nella (7) danno, dopo una integrazione elementare:

$$(18) \quad \pi(E, t) = \frac{B}{E^{n+1}} \frac{[\sigma_0 + \lambda_1(n)][\sigma_0 + \lambda_2(n)]}{C(n)[\lambda_1(n) - \lambda_2(n)]} \left\{ \frac{\lambda_1(n) - \lambda_2(n)}{[\lambda + \lambda_1(n)][\lambda + \lambda_2(n)]} \exp[-\lambda t] + \right. \\ \left. + \frac{\exp[\lambda_1(n)t]}{\lambda + \lambda_1(n)} - \frac{\exp[\lambda_2(n)t]}{\lambda + \lambda_2(n)} \right\}.$$

$$(19) \quad \gamma(w, t) = \frac{B}{w^{n+1}} \frac{1}{\lambda_2(n) - \lambda_1(n)} \left\{ \left[\frac{\sigma_0 + \lambda_1(n)}{\lambda + \lambda_1(n)} - \frac{\sigma_0 + \lambda_2(n)}{\lambda + \lambda_2(n)} \right] \exp[-\lambda t] + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_0 + \lambda_1(n)}{\lambda + \lambda_1(n)} \exp[\lambda_1(n)t] - \frac{\sigma_0 + \lambda_2(n)}{\lambda + \lambda_2(n)} \exp[\lambda_2(n)t] \right\}.$$

$$(20) \quad \Pi(E, t) = \int_E^\infty \pi(E', r) dE' = \frac{E}{n} \pi(E, t).$$

Ponendo queste espressioni nella (11) e sviluppando in serie la $\pi(E_i, t - \delta)$ in prossimità di t si ottiene per $N(0, t)$ dopo elementari integrazioni un'espressione della forma:

$$(21) \quad N(0, t) = D \{a \exp[-\lambda t] + b \exp[\lambda_1(n)t]\},$$

con

$$D = \frac{B}{(n-1)\lambda} \frac{[\sigma_0 + \lambda_1(n)][\sigma_0 + \lambda_2(n)]}{C(n)[\lambda_1(n) - \lambda_2(n)]} \frac{1}{E_i^n},$$

$$a = \left(\frac{1+n}{n} + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\lambda_1(n) - \lambda_2(n)}{[\lambda + \lambda_1(n)][\lambda + \lambda_2(n)]}, \quad b = \left(\frac{1+n}{n} - \frac{1}{2} \lambda_1(n) \right) \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_2(n)}.$$

Il fattore moltiplicativo D , indipendentemente da t , dipende, come si vede, da troppi parametri più o meno incerti perché valga la pena di discuterlo; preferiamo pertanto dare ad esso un valore di normalizzazione $D = 0,5$ di modo da far coincidere il valore del massimo della (21) col massimo valore di intensità elettronica osservata sperimentalmente; menzioniamo tuttavia che attribuendo ai parametri che compaiono nella (16) valori ragionevoli comunemente adottati e ponendo $q = 1/3$ secondo OPPENHEIMER si ottiene $D = 2$ (cioè un valore troppo alto), e D diminuisce al diminuire di q , cioè al diminuire della molteplicità di produzione dei mesoni.

Il primo termine del fattore dipendente da t nella (21) rappresenta il contributo della sorgente nucleonica e di questa rispecchia l'assorbimento; abbiamo posto pertanto (11) $1/\lambda = 0,37$ corrispondente ad uno spessore d'assorbimento

(11) G. BERNARDINI, C. CORBINI e A. MANFREDINI: *Nuovo Cimento*, **6**, 457 (1949).

di 120 g/cm^2 . Il secondo termine rappresenta lo sviluppo a cascata della componente fotoelettronica e $\lambda_1(n)$ dipende da n , il quale a sua volta dipende da γ e da q . Abbiamo d'altra parte che n è l'esponente dello spettro di emissione della componente mesonica e che pertanto, come è noto, dovrà avere un valore prossimo a 1,8, risulta quindi che λ_1 deve essere circa uguale a $-0,47$. Introdotti questi valori nella (21) si ricava l'intensità verticale di componente

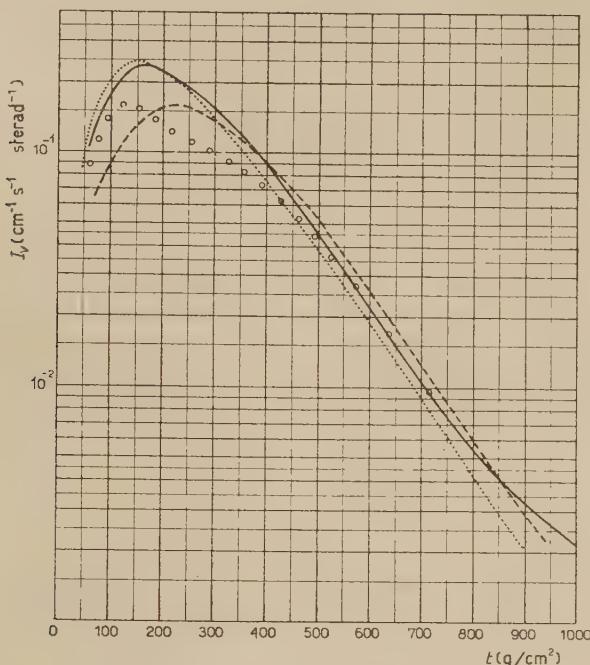


Fig. 1.

elettronica da attendersi nelle ipotesi suddette; il risultato è stato riportato in fig. 1 (linea punteggiata) accanto alle relative curve sperimentali tratte dal noto lavoro di ROSSI (12) (linea continua) e dai dati sperimentali di POMERANTZ (13) normalizzati all'intensità verticale nota a bassa quota (linea a cerchietti). La posizione del massimo della $N(t)$ dipende poco dalla variazione di λ e di $\lambda_1(n)$ entro intervalli ragionevoli. È interessante osservare che l'andamento della $N(t)$ per valori di t al di là del massimo è determinato dal termine $\exp[-\lambda t]$ poiché infatti $|\lambda_1| > |\lambda|$; ciò significa che a medie quote la componente elettronica dovrebbe essere in equilibrio con la componente nucleonica generatrice.

(12) B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

(13) M. A. POMERANTZ: *Phys. Rev.*, **75**, 59 (1949); **75**, 1721 (1949); **77**, 830 (1950)

Come risulta dalla Tab. I il valore adottato $n = 1,8$ si può ottenere sia con $\gamma = 1,5$ e $q = 1/3$ (produzione multipla secondo OPPENHEIMER) e che con $\gamma = 1,8$ e $q = 0$ (produzione plurima).

TABELLA I. — *Valori di n.*

$\gamma \backslash q$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1,5	1,5	1,76	2
1,8	1,8	2,21	2,6
2	2	2,5	3

8. — Basandosi sulla nota teoria della produzione plurima di HEITLER e JANOSSY (5), CLEMENTEL ha (14) calcolato lo spettro di generazione dei mesoni nell'aria mediando lo spettro mesonico generato da un nucleone di data energia nell'urto con nucleo d'aria ad uno spettro nucleonico di potenze; di modo che se $R(\xi)$ è lo spettro calcolato dal CLEMENTEL, la $g(w, 0)$ sarà della forma:

$$(22) \quad g(w, 0) = \frac{4}{3} \frac{J_0}{t_0} R(2w).$$

Introdotta la trasformata di Mellin di questa espressione nelle (10) e (11), si calcolano gli spettri della componente fotoelettronica e, mediante la (13) il numero di elettroni alle varie quote. Abbiamo così calcolato, dopo aver posto nella (13) $\varepsilon = 10$ MeV (ordine dell'energia necessaria ad un elettrone per attraversare un telescopio) l'intensità verticale da attendersi nelle ipotesi di HEITLER e JANOSSY, il risultato è riportato in grafico in fig. 1 (linea tratteggiata). In questo caso è significativo anche il valore oltre che all'andamento della $N(\varepsilon, t)$ ottenuta, in quanto, a parte l'esponente γ che abbiamo posto uguale a 1,8 e che d'altronde non è determinante, gli altri parametri che compaiono nella (13) sono J_0 e t_0 , che si possono ricavare con sufficiente certezza dai dati sperimentali e che abbiamo posto uguali a 0,12 (15) e 0,66 rispettivamente, e i dati sulla sezione d'urto per la produzione dei mesoni che sono stati calcolati dal CLEMENTEL e che per proprio conto sono in accordo con i dati sperimentali sulla produzione dei mesoni e sulle stelle. Come si vede l'accordo quantitativo è soddisfacente a parte la diversità della quota di forma-

(14) E. CLEMENTEL: *Nuovo Cimento*, **7**, 109 (1950).

(15) A. V. GAGUES, J. F. IENKINS e VAN ALLEN: *Phys. Rev.*, **75**, 64 (1949).

sione del massimo teorico e sperimentale che potrebbe indurre ad ammettere l'esistenza di una certa produzione multipla.

9. - Dall'esame dei grafici si può concludere che l'intensità elettronica osservata in media ad alta atmosfera può esser spiegata con l'ipotesi dei mesoni neutri. Se si ammette tale ipotesi bisogna pensare che se una parte della componente elettronica ha origine in processi diversi da quello di disintegrazione dei mesoni, questa parte non è preponderante. A basse quote le curve sperimentali rivelano l'esistenza di una ulteriore sorgente di componente photoelettronica che è ragionevole attribuire al noto contributo degli elettroni generati dai mesoni μ .

In base alle (10), (11) e (13) si potrebbe calcolare l'intensità elettronica partendo dalle ipotesi di WATAGHIN (4) o quelle di HEISENBERG (4) sulla produzione multipla. Riteniamo tuttavia che, data l'incertezza tuttora esistente sui dati sperimentali della componente elettronica in alte quote e dato che alla generazione della componente elettronica intervengono principalmente nucleoni di relativamente modesta energia, per i quali le due opposte teorie di generazione plurima e multipla prevedono aspetti poco diversi nella produzione dei mesoni, è da pensare che i risultati che si otterrebbero non sarebbero tanto diversi da quelli ottenuti nell'ipotesi della produzione plurima da permettere conclusioni significative.

APPENDICE

Qualora si voglia tener conto della anisotropia della primaria nucleonica e della dispersione angolare dei fotoni generati, la (2), tenendo conto della (1), si dovrà scrivere:

$$(2') \quad g(w, t) = \frac{2\pi}{t_0} \int_{E(w)}^{\infty} dE \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J_0 \frac{\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \exp[-\lambda t/\cos \theta] \varphi(E, w, \theta) \sin \theta d\theta,$$

che si può porre nella forma

$$(23) \quad g(w, t) = \frac{1}{t_0} \exp[-\lambda t/\cos \bar{\theta}] \int_{E(w)}^{\infty} J_0 \frac{\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \Phi(E, w) dw;$$

ove $\bar{\theta}$ è definito dalla

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{E(w)}^{\infty} dE \int_0^{\pi/2} J_0 \frac{\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \exp[-\lambda t/\cos \theta] \varphi(E, w, \theta) \sin \theta d\theta = \\ = \exp[-\lambda t/\cos \bar{\theta}] \int_{E(w)}^{\infty} J_0 \frac{\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \Phi(E, w) dw, \end{aligned}$$

per il calcolo è utile osservare che per t e θ non troppo grandi ⁽¹⁶⁾ si può porre con buona approssimazione:

$$(24) \quad \exp[-\lambda t/\cos \theta] \approx (\cos \theta)^{1.14} \exp[-\lambda t]$$

Dalla (23) si deduce che il tener conto dell'anisotropia della primaria è equivalente al sostituire nella (13) $\lambda/\cos \theta$ al posto di λ , il che porta ad un assorbimento più rapido della sorgente, com'era da aspettarsi.

È con piacere che ringrazio il prof. N. DALLAPORTA e il prof. G. PUPPI per utili discussioni sull'argomento.

⁽¹⁶⁾ Nell'aria per $\theta < 45^\circ$ e $t < 8$ l'errore che si commette con la sostituzione (24) è minore del 10 %.

S U M M A R Y

The vertical intensity of the electronic component of cosmic rays is calculated on the assumption that it originates from the γ -rays, decay products of neutral mesons, generated in nuclear explosions at high altitudes. The final formulae which are valid for every present theory on the production of mesons are specialised, roughly in the case of Oppenheimer multiple production and more accurately in case of plural production.

Determinazione dell'intensità di una sorgente di neutroni.

A. BRACCI, U. FACCHINI e E. GERMAGNOLI

Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 30 Luglio 1950)

Riassunto. — L'intensità assoluta di una sorgente neutronica $\text{Ra}\alpha + \text{Be}$ di 501,87 mg è stata misurata ricavando la curva di distribuzione in acqua con dei rivelatori sottili di In e valutando la sensibilità del sistema di conteggio sottponendo i medesimi rivelatori a un flusso noto di neutroni termici. Il valore trovato è $3,01 \pm 0,15 \cdot 10^6$ neutroni sec^{-1} .

1. — Una sorgente puntiforme isotropa di neutroni veloci, collocata in un mezzo rallentante indefinito (acqua, paraffina...) determina nel mezzo stesso una distribuzione stazionaria di neutroni termici che si calcola mediante la nota equazione di diffusione

$$(1) \quad D \Delta \varphi - \varphi / \tau = -S(x, y, z),$$

in cui:

D è la costante di diffusione;

φ è la densità dei neutroni termici;

τ è la vita media per cattura dei neutroni termici nel mezzo considerato;

$S(x, y, z)$ è la funzione di sorgente dei neutroni termici.

Dalla precedente, con una integrazione estesa a tutto lo spazio, si ha

$$(2) \quad Q = \int_V S(x, y, z) dV = \frac{4\pi}{\tau} \int_0^\infty r^2 \varphi(r) dr,$$

cioè il numero Q di neutroni al secondo emessi dalla sorgente quando si possa considerare nulla la probabilità di cattura dei neutroni veloci da parte dei

nuclei del mezzo. In base a tale formula è possibile la misura dell'intensità Q della sorgente, determinando $\rho(r)$ in funzione della distanza dalla sorgente mediante una sonda di densità. Poichè tali sonde misurano la densità a meno di una costante di proporzionalità (dipendente fra l'altro dalla sezione d'urto di cattura dell'elemento costituente la sonda e dall'efficienza del sistema di rivelazione), occorre determinare tale costante con un metodo di taratura assoluta, e ciò è stato fatto dai vari autori in diversi modi. Noi abbiamo usato il seguente metodo.

La densità $\rho(r)$ è misurata irraggiando dei rivelatori di In in una vasca piena d'acqua e conteggiando l'attività β in essi indotta con un contatore di Geiger; poichè la sezione d'urto dell'In segue la legge $\sigma = \sigma_0 v_0/v$, si ha per l'attività $A_{\text{In}}(r)$:

$$(3) \quad A_{\text{In}}(r) = K \rho(r) v_0, \quad \text{con} \quad K = n_{\text{In}} \sigma_{\text{In}} S_{\text{In}} \varepsilon,$$

dove:

n_{In} è il numero di nuclei di In per cm^2 ;

σ_{In} è la sezione di cattura dell'In per neutroni di velocità v_0 ;

ε è l'efficienza del metodo di rivelazione dei neutroni;

S_{In} è la superficie della sonda.

K si determina irraggiando i rivelatori in una cavità in paraffina, in una posizione in cui è noto il flusso dei neutroni e conteggiando con lo stesso contatore Geiger e con le stesse modalità, l'attività ottenuta.

La misura del flusso in tale posizione è fatta conteggiando il numero A_{Li} di particelle α e H^3 prodotte nella reazione $\text{Li}^6(n, \alpha)\text{H}^3$ con una camera di ionizzazione disposta nella cavità e recante uno strato sottile di LiF di massa nota su uno degli elettrodi.

Tale misura dà, tenuto conto delle correzioni di auto assorbimento e di ridiffusione, direttamente il flusso di neutroni termici sull'elettrodo, secondo la formula:

$$(4) \quad A'_{\text{Li}} = n_{\text{Li}} \sigma_{\text{Li}} S_{\text{Li}} \rho' v_0,$$

essendo:

n_{Li} il numero di nuclei di Li per cm^2 ;

σ_{Li} la sezione d'urto del Li per il processo in questione per neutroni di velocità v_0 (σ_{Li} segue pure la legge $\sigma = \sigma_0 v_0/v$);

S_{Li} la superficie dello strato di LiF

ρ' la densità dei neutroni termici.

I rivelatori di In irraggiati sull'elettrodo della stessa camera di ionizzazione e nella medesima posizione danno un'attività:

$$(5) \quad A'_{\text{In}} = K \rho' v_0.$$

Confrontando le precedenti relazioni (2), (3), (4), (5) e ponendo:

$$\tau = \frac{1}{n_H \sigma_H v_0}$$

(n_H è il numero di nuclei di H per cm^3 di H_2O , e σ_H è la sezione d'urto di cattura dell'H per neutroni di velocità v_0) si ha, introducendo le masse molecolari, M_{Li} ed $M_{\text{H}_2\text{O}}$:

$$(6) \quad Q = \frac{8\pi\delta}{m_{\text{Li}}} \cdot \frac{M_{\text{Li}}}{M_{\text{H}_2\text{O}}} \cdot \frac{\sigma_H}{\sigma_{\text{Li}}} \cdot \frac{A'_{\text{Li}}}{A'_{\text{In}}} \cdot \int_0^\infty r^2 A_{\text{In}}(r) \, dr,$$

dove:

m_{Li} è la massa di Li contenuta nello strato di LiF;
 δ è la densità dell' H_2O .

Nelle precedenti considerazioni è implicitamente ammesso che la sonda usata sia una sonda di densità ossia che la sua attivazione $A_{\text{In}}(r)$ sia proporzionale alla densità $\rho(r)$ e quindi non abbiamo per ora tenuto conto di alcuni termini correttivi da introdurre nelle espressioni che danno l'attività dei rivelatori; ciò verrà fatto in seguito.

Il metodo qui esposto richiede la conoscenza del rapporto $\sigma_H/\sigma_{\text{Li}}$, il quale è noto con buona precisione.

2. – La sorgente di neutroni ($\text{Ra}\alpha + \text{Be}$)⁽¹⁾ è costituita da una miscela di 501,87 mg di RaBr_2 e 2,5 g di Be in polvere, racchiusa in un involucro di platino-iridio. Nel corso della misura qui deseritta era sistemata in un astuccio cilindrico di ottone del diametro di 18 mm e dell'altezza di 32 mm. Essa risulta dunque di dimensioni tali da potersi considerare «puntiforme» con sufficiente approssimazione, nel senso che le dimensioni finite della sorgente non alterano apprezzabilmente l'andamento della curva di distribuzione se non nel tratto iniziale ($r \leq 3$ cm) che a sua volta influisce solo di qualche per cento sul valore dell'integrale

$$\int_0^\infty r^2 A_{\text{In}}(r) \, dr.$$

Detta curva di distribuzione è stata ottenuta collocando la sorgente al centro di una vasca piena d'acqua, di forma cubica con lato di cm 120. Questa è abbastanza grande da potersi considerare infinita: ossia la percentuale di neutroni che possono sfuggire dal mezzo idrogenato senza subire per intero il processo di rallentamento per urto è trascurabile. La sorgente di neutroni

⁽¹⁾ Tale sorgente è stata acquistata presso la Società Union Minière du Haut Katanga, Bruxelles.

veniva sospesa con apposito sostegno al centro della vasca e i rivelatori venivano irraggiati, collocandoli per mezzo di un supporto di plexiglas a varie distanze dal centro lungo un asse orizzontale. Per tener conto di un eventuale effetto di cattura dei neutroni da parte di sostanze contenute nell'acqua, alcune misure sono state eseguite in una vasca di dimensioni più ridotte contenente acqua distillata: nessuna apprezzabile differenza è stata osservata nell'attività dei rivelatori nei due casi.

I rivelatori sono stati scelti in modo da soddisfare alle seguenti condizioni:

- 1) che seguissero nella zona delle energie termiche la legge $\sigma = \sigma_0 v_0/v$;
- 2) che perturbassero poco la densità neutronica preesistente nel mezzo ⁽²⁾, cioè fossero abbastanza sottili;
- 3) che consentissero misure abbastanza lunghe e quindi sufficientemente precise, senza dover attendere troppo tempo per il decadimento dell'attività indotta prima di poterli nuovamente utilizzare;
- 4) che emettessero dei raggi β abbastanza energici da poter essere facilmente rivelabili.

L'In (che ha una vita media predominante di 54 minuti e raggi β di circa 0,8 MeV e una sola riga di risonanza a 1,44 eV, ossia nettamente sopra la zona termica) soddisfa assai bene alla prima, alla terza e alla quarta condizione; si è tenuto conto della seconda preparando dei dischetti di lega indio-stagno che avessero una sufficiente rigidità pur avendo uno spessore equivalente di In di soli $7,5 \text{ mg} \cdot \text{cm}^{-2}$.

Per le misure a distanze maggiori di 20 cm dalla sorgente si è invece fatto uso di rivelatori spessi di solo In allo scopo di ottenere attivazioni più intense. I risultati ottenuti con questi ultimi sono stati normalizzati su quelli dati dalle sonde precedentemente descritte.

In entrambi i casi i dischetti di In erano del diametro di 28 mm.

Per il conteggio degli elettroni di disintegrazione emessi dai rivelatori è stato usato un contatore di Geiger-Müller fornito di una finestra di mica dello spessore di $20 \text{ mg} \cdot \text{cm}^{-2}$ e riempito con 10 cm Hg di argon, 1 cm Hg di alcool etilico e circa 10^{-2} mm Hg di freon. I rivelatori venivano collocati a 4 mm di distanza dalla finestra adattandoli a un apposito sostegno di plexiglas. In figg. 1 e 2 diamo il disegno di detto contatore e la relativa curva caratteristica. Il rendimento al conteggio dei raggi β dell'insieme contatore-rivelatore per le nostre condizioni è dell'ordine del 10 %.

Ciascun rivelatore veniva irraggiato per 60 minuti e gli elettroni di disintegrazione venivano conteggiati pure per 60 minuti. L'intervallo tra le due operazioni era di 5 minuti, per permettere il trasporto della sonda dalla posizione di irraggiamento alla posizione di conteggio. Si sono ripetute periodicamente alcune misure a distanze prestabilite dalla sorgente per verificare

⁽²⁾ E. CORINALDESI: *Nuovo Cimento*, **3**, 131 (1946).

che nessuna alterazione sensibile fosse intervenuta nei rivelatori o nel contatore.

La riproducibilità delle misure è risultata entro l'1 %.

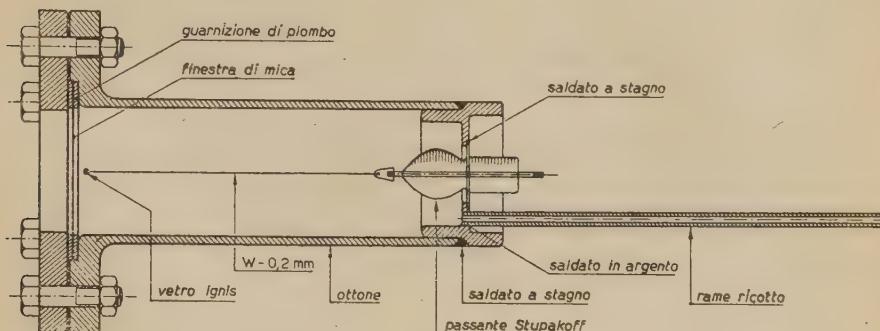


Fig. 1. — Contatore a foglia di mica per raggi β .

3. — Poichè l'In presenta, come si è detto, una riga di risonanza piuttosto intensa per i neutroni dell'energia di 1,44 eV, l'attività dovuta ai neutroni termici si è ottenuta per differenza tra le attività misurate dopo irraggiamento

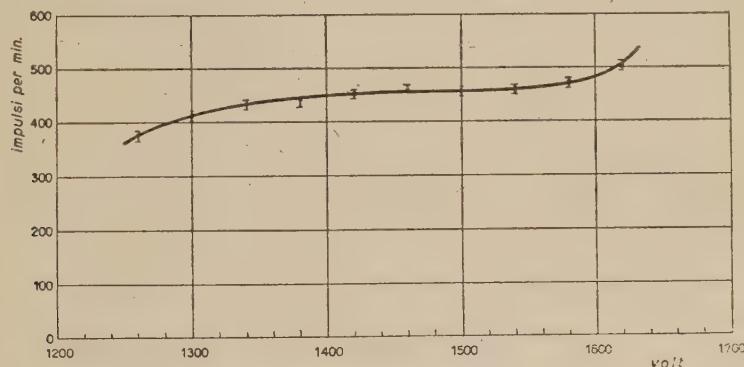


Fig. 2. Caratteristica del contatore di fig. 1.

della sonda, una volta schermata da ambo le facce mediante dischetti di Cd dello spessore di 0,6 mm (che sono sufficienti ad assorbire totalmente i neutroni termici), e una volta senza tali dischetti. Si ha pertanto:

$$A_{\text{In}} = A_{\text{In totale}} - A_{\text{In ris}}.$$

L'attività di risonanza va però corretta per tener conto del fatto che i neutroni di risonanza subiscono un assorbimento non trascurabile nel Cd stesso. A tal fine si è ricavata la curva di assorbimento nei neutroni nel Cd,

per spessori variabili da 0,2 mm a 1 mm, e si è estrapolata a zero la parte di tale curva corrispondente alla attenuazione dei neutroni appartenenti alla

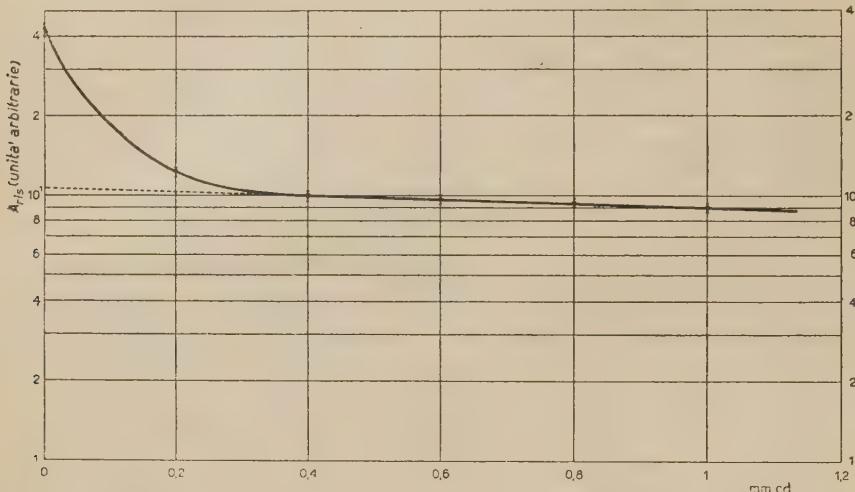


Fig. 3. – Curva di assorbimento del Cd.

riga di risonanza. Risulta che l'attività di risonanza $A_{In\ ris}$, se misurata con uno schermo di Cd dello spessore di 0,6 mm deve essere corretta di un fattore

$$\frac{A_{In\ ris}(0)}{A_{In\ ris}(0,6)} = 1,108 \pm 0,020 \quad (\text{cfr. fig. 3}).$$

4. – Riportiamo in fig. 4 la curva di distribuzione che dà $r^2 A_{In}(r)$ in funzione di r e nella tabella I i valori delle attività A_{In} misurate. Ciascun punto

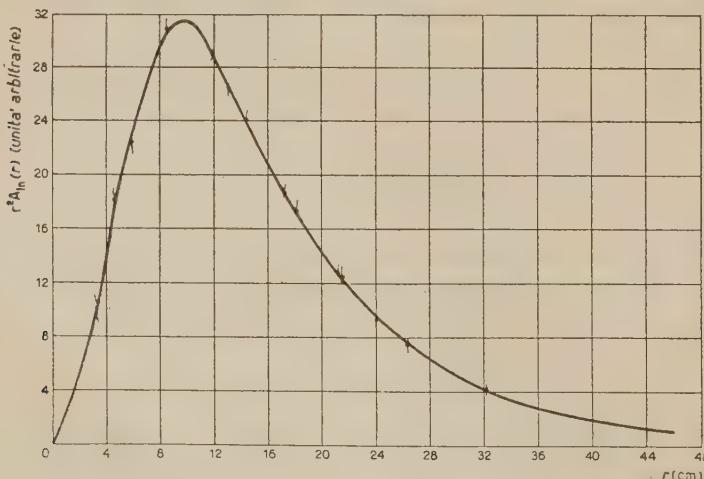


Fig. 4. – Curva di distribuzione dei neutroni termici.

di essa è stato ottenuto come media di diverse determinazioni compiute con tre rivelatori di In-Sn o, per le distanze più grandi, con due rivelatori di In. Per distanze minori di 3 cm e maggiori di 30 cm non è possibile ottenere sperimentalmente l'andamento della curva con buona precisione, nel primo caso a causa delle dimensioni della sorgente e nel secondo caso perchè l'attivazione è troppo debole per permettere misure attendibili.

TABELLA I. — Attività termica in H_2O .

r (cm)	r^2 (cm ²)	A_{In} (unità arbitrarie)	$r^2 A_{In}$
3,19	10,11	1,—	10,11 \pm 2 %
4,48	20,07	0,9000 \pm 2 %	18,06 \pm 2,5 %
5,74	32,94	0,6830 \pm 2 %	22,50 \pm 2,5 %
8,33	69,39	0,4440 \pm 1,5 %	30,80 \pm 1,8 %
11,73	137,59	0,2100 \pm 1,4 %	28,90 \pm 1,6 %
12,92	166,92	0,1587 \pm 1,5 %	26,50 \pm 2,1 %
14,32	205,06	0,1170 \pm 2 %	24,07 \pm 2,2 %
17,09	292,07	0,0643 \pm 2 %	18,78 \pm 2,2 %
18,01	324,36	0,0536 \pm 2 %	17,38 \pm 2,2 %
21,19	449,02	0,0285 \pm 2 %	12,80 \pm 2,3 %
21,31	454,11	0,0270 \pm 2 %	12,26 \pm 2,3 %
23,95	573,60	0,0163 \pm 1 %	9,37 \pm 1,5 %
25,48	649,23	0,0140 \pm 3 %	9,09 \pm 4 %
26,35	694,32	0,0109 \pm 2 %	7,59 \pm 2,3 %
32,18	1035,55	0,0040 \pm 7 %	4,14 \pm 7 %

In questi tratti la curva è stata estrapolata adattando ai punti sperimentali le curve di equazione:

$$r^2 A(r) = 1,23 r^2 \exp \left[-\frac{r^2}{59,9} \right], \quad \text{per } 0 \leq r \leq 5 \text{ cm ,}$$

$$r^2 A(r) = 106,45 \exp \left[-\frac{r}{9,94} \right], \quad \text{per } r \geq 16 \text{ cm .}$$

I valori delle costanti sono stati ottenuti col metodo dei minimi quadrati.

Il valore di

$$\int_0^{\infty} r^2 A_{In}(r) dr$$

è stato calcolato analiticamente nel tratto iniziale e nel tratto esponenziale della curva e graficamente per $5 \leq r \leq 16$ cm; si è ottenuto

$$546,37 \pm 2 \%$$

(l'attività dei rivelatori è normalizzata in modo che risulti unitaria per ognuno di essi nella posizione più vicina alla sorgente).

5. – Le misure relative alla cavità praticata nel blocco di paraffina di cui si è fatto cenno sono state eseguite con la disposizione sperimentale già descritta (3) e hanno dato per il numero delle fissioni per mg di Li e per minuto il valore

$$A'_{\text{Li}} = 274,82 \pm 1,2 \text{ \%}.$$

Nella medesima posizione sono stati collocati successivamente i rivelatori già utilizzati per la misura della densità neutronica nell'acqua.

Disponendo i rivelatori in varie posizioni sull'elettrodo, si è constatato che il flusso incidente su di esso non è esattamente uniforme, ma si hanno scarti al massimo di circa il 5 %. Assumendo un valore medio per l'attività misurata in queste condizioni si è ottenuto il valore

$$A'_{\text{In}} = 0,03823 \pm 2,6 \text{ \%}$$

che rappresenta la media dei risultati normalizzati relativi a tre rivelatori.

6. – L'attività dei rivelatori è stata misurata rivolgendo verso il volume utile del contatore la stessa faccia che era stata rivolta verso la sorgente nel corso dell'irraggiamento. Ciò impone una correzione per tener conto della distribuzione angolare dei neutroni incidenti sul rivelatore che in generale non è isotropa e dipende dalla posizione in cui è irraggiato il rivelatore.

BOTHE (4) ha dimostrato che l'attivazione totale della sonda (cioè il numero di nuclei attivati) è praticamente indipendente da tale distribuzione se l'assorbimento per neutroni incidenti normalmente è minore del 20 %, condizioni soddisfatte nel nostro caso.

Varia evidentemente con la distribuzione angolare dei neutroni la densità locale dei nuclei attivati e quindi, a causa dell'assorbimento dei raggi β nella sonda, si misura una attività diversa fra le due facce.

Secondo il procedimento introdotto da AMALDI e FERMI (5), misurando l'attività in entrambe le facce e prendendo la media dei due risultati si ha una misura dell'attività praticamente indipendente dalla distribuzione angolare dei neutroni. Ciò è stato fatto nell'acqua per alcune distanze del rivelatore dalla sorgente, ricavando come varia in funzione della distanza il rapporto tra la media delle attività misurata sulle due facce e l'attività relativa alla

(3) U. FACCHINI e E. GATTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 55 (1950).

(4) W. BOTHE: *Zeits. f. Phys.*, **119**, 493 (1942).

(5) E. AMALDI e E. FERMI: *Ric. Scient.*, **1**, 456 (1935).

faccia rivolta verso la sorgente. Tale rapporto è risultato uguale a 0,96 per $0 < r < 5$ cm, e a 0,99 per distanze maggiori. Un'analoga correzione è stata ricavata per le misure eseguite sull'elettrodo della camera di ionizzazione ottenendo un rapporto uguale a 1,01.

Il rapporto

$$\frac{1}{A'_{\text{In}}} \int_0^{\infty} r^2 A_{\text{In}}(r) dr$$

va pertanto corretto del fattore $0,98 \pm 2\%$.

7. — La correzione per la perturbazione del campo neutronico da parte dei rivelatori è stata eseguita nel seguente modo.

A noi interessa il rapporto delle perturbazioni che si hanno in acqua e nella cavità in paraffina, e al proposito si può osservare che, quando le misure siano eseguite mediando l'attività sulle due facce e la sezione d'urto σ dei rivelatori segua nella zona termica la legge $\sigma = \sigma_0 v_0 / v$ il rapporto A/A' dipende solo dal prodotto $n\sigma$ caratteristico del rivelatore ed è uguale per $n\sigma = 0$ al rapporto delle densità neutroniche, nelle due posizioni.

Abbiamo misurato il rapporto A/A' usando rivelatori di diverse sostanze (In, Ag, Rh) e spessori ottenendo i risultati riportati nella tabella II e nella curva di fig. 5. Tale curva ha andamento iperbolico come si prevede facilmente

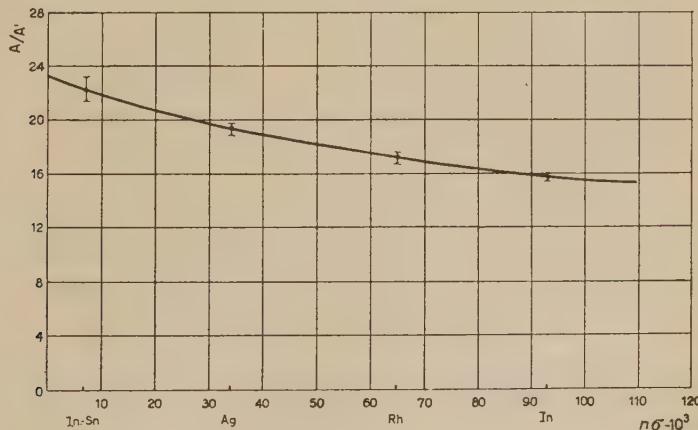


Fig. 5. — Rapporto fra le attività in H_2O e in cavità in funzione dell' $n\sigma$ del rivelatore. L'equazione dell'iperbole è

$$\frac{A}{A'} = 23,15 \frac{1 + 0,002 n\sigma}{1 + 0,008 n\sigma}$$

dalla formula conclusiva dell'articolo citato di CORINALDESI (2), quando la si approssimi mediante uno sviluppo in serie arrestato al primo ordine.

TABELLA II.

Correzione per la perturbazione della densità neutronica da parte del rivelatore.

Rivelatore	$n\sigma$	A distanza cm 4,49	A'	$\frac{A}{A'}$
In-Sn	0,007	60817	2025	$22,32 \pm 0,87$
Ag	0,034	15845	823	$19,25 \pm 0,30$
Rh	0,065	37678	2207	$17,07 \pm 0,36$
In n. 4	0,093	479869	30657	$15,65 \pm 0,16$

La correzione cercata per $A_{\text{In}}/A'_{\text{In}}$ si ha allora dal rapporto dei valori corrispondenti a $n\sigma = 0$ (rivelatore infinitamente sottile) e a $n\sigma = 0,007$ (rivelatori di In-Sn usati) e risulta uguale a $1,037 \pm 1\%$.

8. — Occorre infine tener conto del fatto che una piccola frazione dei neutroni è catturata dall'H ad energie superiori al taglio di 0,4 eV del Cadmio. Tale frazione è stata ricavata da WALKER (6) ed è in H₂O pari a 0,0074.

9. — Per il rapporto $\sigma_{\text{H}}/\sigma_{\text{Li}}$ si è assunto il valore $4,647 \cdot 10^{-3} \pm 2\%$ che risulta dal valore 2270 ± 30 di $\sigma_{\text{B}}/\sigma_{\text{H}}$ dato da WHITEHOUSE e GRAHAM (7) e dal valore $0,0948 \pm 0,0013$ di $\sigma_{\text{Li}}/\sigma_{\text{B}}$ dato da FENNING e coll. (8).

10. — Introducendo nell'espressione (6) i valori precedentemente indicati con le relative correzioni si ottiene

$$Q = (3,01 \pm 0,15) \cdot 10^6 \text{ neutroni sec}^{-1}.$$

Questo valore è circa la metà di quelli trovati per sorgenti Ra α + Be preparate per la maggior parte in laboratori americani. Recentemente è stato descritto da ANDERSON e coll. (9) un metodo di preparazione di sorgenti Ra α + Be che permette di raggiungere un'intensità data da

$$Q = 1,7 \cdot 10^7 \frac{M_{\text{Be}}}{M_{\text{Be}} + M_{\text{RaBr}_2}} \text{ neutroni sec}^{-1} \cdot (\text{grammi Ra})^{-1},$$

(6) R. L. WALKER: *Absolute Calibration of a Ra-Be Neutron Source*. L.A.D.C., 155.

(7) W. J. WITHEHOUSE e G. A. R. GRAHAM: *Canadian Journl of Res.*, 25, 261 (1947).

(8) F. W. FENNING, G. A. R. GRAHAM e H. SELIGMAN: *Canadian Journ. of Res.*, 25, 73 (1947).

(9) N. L. ANDERSON e B. T. FELD: *Rev. Scient. Inst.*, 18, 186 (1947).

dove:

$$\begin{aligned} M_{\text{Be}} & \text{ è la massa del Be;} \\ M_{\text{RaBr}_2} & \text{ è la massa del RaBr}_2; \end{aligned}$$

che darebbe per la nostra sorgente $6,3 \cdot 10^6$ neutroni sec $^{-1}$.

Se ne deduce che l'intensità di una sorgente neutronica del genere dipende in modo nettissimo dal procedimento usato nella sua preparazione.

11. – Recentemente ALDER e HUBER ⁽¹⁰⁾ hanno trovato per una loro sorgente di 96,45 mg di Ra α + Be ⁽¹¹⁾ l'intensità $Q = (6,10 \pm 0,24) \cdot 10^5$ neutroni sec $^{-1}$, cioè dello stesso ordine di grandezza della nostra se riferita a 1 mg di Ra α + Be.

È parso interessante eseguire una misura relativa dell'intensità delle due sorgenti.

Il confronto, compiuto presso l'Istituto di Fisica della Università di Basilea, in collaborazione con l'Istituto di Fisica Superiore dell'Università di Milano, ha dato per il rapporto del numero di neutroni emessi dalle due sorgenti il valore $4,61 \pm 0,15$ che è in buon accordo con quello che si ricava dai valori delle intensità assolute indipendentemente misurate e che risulta

$$\frac{(3,01 \pm 0,15) \cdot 10^6}{(6,10 \pm 0,24) \cdot 10^5} = 4,93 \pm 0,45.$$

Ringraziamo il prof. G. BOLLA e i proff. E. AMALDI e B. FERRETTI per le discussioni e gli utili consigli datici e il prof. P. HUBER e il dott. W. Haelg per averci gentilmente fornito la possibilità di eseguire la misura di confronto della nostra sorgente con quella esistente all'Istituto di Fisica di Basilea.

⁽¹⁰⁾ F. ALDER e P. HUBER: *Helv. Phys. Acta*, **22**, 4-368 (1949).

⁽¹¹⁾ Pure proveniente dalla Società Union Minière du Haut Katanga, Bruxelles.

SUMMARY

The distribution curve in water of Ra α + Be neutron has been determined by means of thin In foils. In order to evaluate the absolute strength of the source (501,87 mg of Ra), the yield of the counting system has been measured by irradiating the same detectors by a thermal neutron flux of known intensity. The source strength has been found to be $3,01 \pm 0,15 \cdot 10^6$ neutrons sec $^{-1}$.

On the Electromagnetic Properties of Mesons.

E. CORINALDESI

The Physical Laboratories, University of Manchester, Manchester, England

(ricevuto il 3 Agosto 1950)

Summary. — The influence of the meson-nucleon interaction on the electromagnetic properties of mesons is studied in this paper. The induced meson current is evaluated for scalar and pseudoscalar mesons, and it is proved that it can give an appreciable contribution to the electric scattering.

1. — Introduction.

It has been known for some time that the electromagnetic properties of a nucleon are altered by its coupling to a meson field. Such a mechanism has been accepted as a possible explanation of the anomalous magnetic moment of the neutron and proton, and of the neutron-electron interaction. A satisfactory treatment of this problem has recently been given by various authors ⁽¹⁾ ⁽²⁾ ⁽³⁾ ⁽⁴⁾, who have used renormalization methods in order to deal with divergent results.

The question arises now whether it should not be reasonable to expect the existence of analogous effects for a meson. In fact, the electromagnetic properties of this particle might well be influenced by its coupling to the nucleon field. The purpose of this paper is to present a calculation which proves that an effect of this kind indeed exists. We have restricted ourselves to the case of scalar and pseudoscalar mesons. The computation has been

⁽¹⁾ J. LUTTINGER: *Helv. Phys. Acta*, **21**, 483 (1948).

⁽²⁾ M. SLOTNICK and W. HEITLER: *Phys. Rev.*, **75**, 1645 (1949).

⁽³⁾ K. CASE: *Phys. Rev.*, **76**, 1 (1949).

⁽⁴⁾ S. BOROWITZ and W. KOHN: *Phys. Rev.*, **76**, 818 (1949).

carried out by the two methods of Schwinger and Feynman-Dyson independently, in analogy with the papers of reference (4) and (3) respectively.

2. — Calculation.

The notation of reference (4) will be used throughout. The interaction of mesons with the electromagnetic field is given by

$$(1) \quad H_{elm}(x) = -\frac{1}{c} A_\mu(x) j_\mu^{(m)}(x) + \frac{e^2}{2\hbar^2 c^2} [A_\mu(x)^2 + (n_\mu A_\mu(x))^2] (\Phi_1^2 + \Phi_2^2).$$

Here Φ_1 and Φ_2 are the charged components of the meson field $\Phi \equiv (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, and

$$(2) \quad j_\mu^{(m)}(x) = \frac{e}{\hbar} \left(\Phi_2(x) \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_\mu} - \Phi_1(x) \frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x_\mu} \right).$$

The interaction H_{elm} gives rise to various processes, e.g. to the scattering of a meson by the potential A_μ . The second term of (1) will be neglected, as it is of a higher order in e .

The interaction

$$(3) \quad H(x) = -ig\bar{\psi}(x)\gamma_5\tau\psi(x)\Phi(x),$$

represents the coupling of pseudoscalar mesons to the nucleon field. Here $\tau \equiv (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ is the isotopic spin operator, ψ and $\bar{\psi}$ the operators of the nucleon field, g the coupling constant. For scalar mesons $i\gamma_5$ should be replaced by 1. The main physical conclusions of the present calculation will hold for both kinds of mesons. The electromagnetic interaction of the nucleon field is represented by the current operator

$$(4) \quad j_\mu^{(n)}(x) = iec\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \frac{1 + \tau_3}{2} \psi(x).$$

For reasons given in reference (3) and (4), symmetrization is unnecessary.

If we carry out the elimination of (3) by a canonical transformation, we find that the current operator of the mesons becomes

$$(5) \quad j_\mu^{(m)} + \delta j_\mu^{(1)} + \delta j_\mu^{(2)} + \dots.$$

Denoting by $j_\mu(x)$ the sum $j_\mu^{(m)}(x) + j_\mu^{(n)}(x)$,

$$(6) \quad \delta j_\mu^{(1)} = -\frac{i}{2\hbar c} \int d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \langle [j_\mu(x), H(x')] \rangle$$

and

$$(7) \quad \delta j_{\mu}^{(2)} = \frac{i}{2\hbar c} \int d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \langle [j_{\mu}(x), H_{0,1}(x')] \rangle + \\ + \left(-\frac{i}{2\hbar c} \right)^2 \int d\omega' d\omega'' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \varepsilon[\sigma', \sigma''] \langle [[j_{\mu}(x), H(x')], H(x'')] \rangle.$$

Here $\langle \dots \rangle$ indicates the expectation value for a vacuum of nucleons, and $H_{0,1}$ the self-energy operator of the meson field.

Retaining only expressions which are bilinear in the variables Φ_i , we see that $\delta j_{\mu}^{(1)}$ gives a vanishing contribution. As regards $\delta j_{\mu}^{(2)}$, we discuss separately the two terms, containing $j_{\mu}^{(n)}$ and $j_{\mu}^{(m)}$ respectively. The first term gives

$$(8) \quad \left(-\frac{i}{2\hbar c} \right)^2 \int d\omega' d\omega'' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \varepsilon[\sigma', \sigma''] \langle [[j_{\mu}^{(n)}(x), H(x')], H(x'')] \rangle = \\ = \frac{ig^2 e}{8\hbar^2 c} \int d\omega' d\omega'' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \varepsilon[\sigma', \sigma''] \times \\ \times \langle [[\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} (1 + \tau_3) \psi(x), \bar{\psi}(x') \gamma_5 \tau \psi(x') \Phi(x')], \bar{\psi}(x'') \gamma_5 \tau \psi(x'') \Phi(x'')] \rangle.$$

After a number of transformations this reduces to the expression

$$(9) \quad \frac{4g^2 e i}{\hbar^2 c} \int d\omega' d\omega'' \Phi_1(x') \Phi_2(x'') L_{\mu},$$

where

$$(10) \quad L_{\mu} = \frac{1}{(2\pi)^4} \times \\ \times \int (dk)(dk') (dk'') \exp [ik(x' - x'') + ik'(x - x') + ik''(x'' - x)] \times \\ \times \{ k_{\mu}[(k'k'') + \kappa^2] - k'_{\mu}[(kk'') + \kappa^2] - k''_{\mu}[(kk') + \kappa^2] \} \times \\ \times \left\{ \frac{\delta(k'^2 + \kappa^2)}{(k^2 + \kappa^2)(k''^2 + \kappa^2)} + \frac{\delta(k''^2 + \kappa^2)}{(k^2 + \kappa^2)(k'^2 + \kappa^2)} + \frac{\delta(k^2 + \kappa^2)}{(k'^2 + \kappa^2)(k''^2 + \kappa^2)} \right\}.$$

As the calculation is very similar to that presented in reference (4), we can spare the details.

We should now deal with

$$(11) \quad \frac{i}{2\hbar c} \int d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \langle [j_{\mu}^{(m)}(x), H_{0,1}(x')] \rangle + \\ + \left(-\frac{i}{2\hbar c} \right)^2 \int d\omega' d\omega'' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \varepsilon[\sigma', \sigma''] \langle [[j_{\mu}^{(m)}(x), H(x')], H(x'')] \rangle.$$

This is proved to vanish by direct calculation. This fact is better realised

if we write the expression which corresponds to (11) in the Feynman-Dyson method:

$$(12) \quad \frac{eg^2}{2\hbar^2 c^2} \int d\omega' d\omega'' P \{ \bar{\Psi}(x') \gamma_5 \tau_\nu \psi(x'), \bar{\Psi}(x'') \gamma_5 \tau_\sigma \psi(x'') \} \times \\ \times P \left\{ \Phi_1(x) \frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x_\mu} - \Phi_2(x) \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_\mu}, \Phi_\nu(x'), \Phi_\sigma(x'') \right\}$$

(with the convention of dropping all mass-renormalization terms).

The one-meson, zero-nucleon part of (12) is now to be calculated. We must leave two of the variables Φ as operators, and neither of them may be a function of x , as we have agreed to omit the self-energy contributions. Therefore the two Φ which are functions of x' and x'' are to be retained as operators. However, the expression thus obtained is proportional to the vacuum expectation value of $\Phi_1 \partial \Phi_2 / \partial x_\mu - \Phi_2 \partial \Phi_1 / \partial x_\mu$, and therefore must vanish.

In conclusion, we are left only with (9). Of this we do not give the corresponding expression in the Feynman-Dyson method, as it would not provide anything new.

By carrying out appropriate manipulations, (9) can be given the form:

$$(13) \quad \delta j_\mu^{(2)} = -\frac{4g^2}{(2\pi)^3 \hbar c} j_\mu^{(m)}(x) \int k^2 (dk) \times \\ \times \int_0^1 u \left(1 - \frac{3}{4} u \right) \delta''(k^2 + \kappa^2 - \mu^2 u + \mu^2 u^2) du - \\ - \frac{g^2}{(2\pi)^6 \hbar c} \int (dX) j_\mu^{(m)}(X) \int (dp) \exp [ip(x - X)] F(p^2),$$

where

$$(14) \quad F(p^2) = \int_0^1 u du \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{1 - \eta u + \eta u^2 + p^2 u^2 (1 - v^2) / 4\kappa^2} \times \\ \times \left\{ \left(1 - \frac{u}{2} \right) + \frac{p^2 u^2}{4\kappa^2} \left(-1 + \frac{u}{2} - 3v^2 + \frac{5}{2} v^2 u \right) + \eta \frac{u(1-u)^2}{2} \right\}^{(5)}.$$

Here μ and κ are the Compton wave-length of the mesons and of the nucleons respectively, and $\eta = \mu^2/\kappa^2$.

It must be pointed out that the first term in (13) is to be dropped, as it is a charge correction. As for the second term, $F(p^2)$ should be replaced by $F(p^2) - F(0)$, if we assume that the zero-order term of an expansion in powers

⁽⁵⁾ For scalar mesons the term $(1 - u/2)$ is to be replaced by $((3/2)u - 1)$.

of p^2 is to be defined as charge renormalization. However, the main physical conclusions of the present paper are unaffected by the above replacement.

Integrating with respect to v , we now obtain:

$$(15) \quad F(p^2) = \frac{4}{3} + 2 \int_0^1 du \left[\frac{p^2}{\kappa^2} \left(1 - \eta u + \eta u^2 + \frac{p^2 u^2}{4\kappa^2} \right) \right]^{-1/2} \times \\ \times \left[2(u-1) + \eta \left(\frac{7}{2} u - \frac{13}{2} u^2 + 3u^3 \right) + \frac{p^2 u^2}{4\kappa^2} (3u-4) \right] \times \\ \times \log \frac{\sqrt{1 - \eta u + \eta u^2 + p^2 u^2 / 4\kappa^2} + \sqrt{p^2 u^2 / 4\kappa^2}}{\sqrt{1 - \eta u + \eta u^2 + p^2 u^2 / 4\kappa^2} - \sqrt{p^2 u^2 / 4\kappa^2}}.$$

It is important to notice that the asymptotic behaviour of $F(p^2)$ for p^2 very large is given by the formula

$$(16) \quad F(p^2) \sim -\log \frac{p^2}{\kappa^2}, \quad p^2 \rightarrow \infty.$$

3. – Physical discussion.

a) *Quasi-constant electromagnetic potential.* – If higher powers of the differential operator \square/κ^2 applied to A_μ give a negligible result, i.e. if the variation of A_μ in space and time is small within a Compton wave-length of the nucleon, we are entitled to expand $F(p^2)$ in powers of p^2 , and keep only linear terms. In fact, p^2/κ^2 is equivalent to the operator $(-\square/\kappa^2)$ applied to $\exp [ip(x-X)]$. Therefore, as the expression $-(1/c)A_\mu \delta j_\mu^{(2)}$ will be integrated over x , we can transfer \square to A_μ by partial integration. Dropping terms of zero-order in p^2 (charge renormalization), we obtain

$$(17) \quad F(p^2) = \frac{1}{6} \frac{p^2}{\kappa^2} \int_0^1 \frac{u^3 du}{(1 - \eta u + \eta u^2)^2} [-8 + 5u(1 + \eta) - 8\eta u^2 + 3\eta u^3].$$

The correction to the electromagnetic interaction is then

$$(18) \quad -\frac{1}{c} A_\mu \delta j_\mu^{(2)} = \frac{g^2}{4\pi^2 \hbar c^2} \frac{1}{\kappa^2} A_\mu \cdot \square j_\mu^{(m)} \left[\frac{1}{6} + \frac{\eta}{30} + O(\eta^2) \right] = \\ = -\frac{g^2}{4\pi^2 \hbar c^3} \frac{1}{\kappa^2} j_\mu^{(m)} \cdot J_\mu \left[\frac{1}{6} + \frac{\eta}{30} + O(\eta^2) \right],$$

as $\square A_\mu = -(1/c)J_\mu$.

Here J_μ is the current of the particles which produce the potential A_μ . The quantity (18) is in general negligible.

b) *Scattering.* — We now consider the electromagnetic scattering of mesons by charged particles P , e.g. protons. The matrix element given by the first term of (1) is

$$(19) \quad U(e) = -\frac{i}{\hbar c} \int d\omega \left(i \left| -\frac{1}{e} A_\mu(x) j_\mu^{(m)}(x) \right| f \right),$$

and we intend to compare it with

$$(20) \quad U(eg^2) = -\frac{i}{\hbar c} \int d\omega \left(i \left| -\frac{1}{e} A_\mu(x) \delta j_\mu^{(2)}(x) \right| f \right).$$

Here

$$(21) \quad A_\mu(x) = \frac{1}{e} \int \bar{D}(x - x') J_\mu(x') d\omega',$$

J_μ being the current of the P -particles. We consider a process in which a meson is scattered from a state of momentum p_1 to a state of momentum p_2 , and a P -particle from P_1 to P_2 . Therefore, we can replace $(1/e) j_\mu^{(m)}(x)$ by $a_\mu \exp[ix(p_1 - p_2)]$ and $(1/e) J_\mu(x')$ by $b_\mu \exp[ix'(P_1 - P_2)]$. Hence,

$$(22) \quad U(e) = \frac{(2\pi)^4 i(a, b)}{\hbar c} \delta(p_1 + P_1 - p_2 - P_2) \cdot \int \bar{D}(\xi) \exp[i\xi(p_1 - p_2)] (d\xi),$$

and

$$(23) \quad U(eg^2) = \frac{(2\pi)^4 i(a, b) g^2}{4\pi^2 \hbar^2 c^2} \delta(p_1 + P_1 - p_2 - P_2) F((p_1 - p_2)^2) \times \\ \times \int \bar{D}(\xi) \exp[i\xi(p_1 - p_2)] (d\xi).$$

Here the four-dimensional δ -function expresses the conservation of energy and momentum.

The ratio

$$(24) \quad \frac{U(eg^2)}{U(e)} = \frac{g^2}{4\pi^2 \hbar c} F((p_1 - p_2)^2)$$

can be quite large for large $(p_1 - p_2)^2$ (cfr. formula (16)), although both (22) and (23) decrease for increasing $(p_1 - p_2)^2$, on account of the factor

$$(25) \quad \int \bar{D}(\xi) \exp[i\xi(p_1 - p_2)] (d\xi) = \frac{1}{(p_1 - p_2)^2}$$

This means that in some case the g^2 -correction to the scattering can play an important role.

If the recoil of the P -particle is neglected we obtain

$$(26) \quad \frac{U(eg^2)}{U(e)} = \frac{g^2}{4\pi^2 \hbar c} F(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2).$$

If $|\mathbf{p}_1|$ and $|\mathbf{p}_2|$ are both large and the angle of scattering is near 90° , then $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2$ is very large, and

$$(27) \quad F(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2) \sim -\log \frac{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2}{x^2}.$$

The Author is indebted to Prof. L. ROSENFELD for his interest and encouragement, and to the University of Manchester for the tenure of a Turner & Newall Fellowship.

RIASSUNTO

Si studiano le modifiche apportate dalla interazione mesoni-nucleoni alle proprietà elettromagnetiche dei mesoni, ossia un effetto analogo al momento magnetico anomalo del neutrone e protone ed alla interazione neutrone-elettrone. Si dimostra che lo scattering coulombiano dei mesoni può essere sensibilmente influenzato alle alte energie.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Sul problema degli autovalori della energia dei sistemi chiusi nella teoria dei campi

B. FERRETTI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 4 Settembre 1950)

In alcune lettere precedenti ⁽¹⁾ ho trattato del problema della diagonalizzazione della hamiltoniana o degli autovalori della energia nella teoria dei campi d'onda, limitatamente però al caso di interesse puramente formale di uno spettro continuo di autovalori o in cui almeno la teoria delle perturbazioni fosse applicabile (cfr. III).

Nella lettera presente voglio accennare a un metodo con il quale si possono generalizzare le considerazioni precedenti al caso di reale interesse fisico in cui il campo di forze dà luogo a sistemi chiusi, caso che non può trattarsi con la teoria delle perturbazioni.

Anche in questo caso è fatto uso capitale dell'artificio della « accensione adiabatica » della carica. Si può allora mostrare che detto $\Pi(\lambda, t)$ l'operatore unitario generatore della trasformazione canonica che rende diagonale $H_0 + \lambda \underline{H}'$ (cfr. I) nel sistema di riferimento dello spazio hilbertiano in cui H_0 è diagonale, talché

$$(1) \quad \mathcal{E}(\lambda) = \Pi^{-1}(H_0 + \lambda \underline{H}')\Pi$$

è diagonale con H_0 , $\Pi(\lambda)$ ed $\mathcal{E}(\lambda)$ soddisfano alle seguenti equazioni

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi^{-1} \frac{\delta \Pi}{\delta \lambda} = -i \exp \left[-i \int_{-\infty}^t \mathcal{E} dt \right] \cdot \int_{-\infty}^t \exp \left[i \int_{-\infty}^{t'} \mathcal{E} dt \right] t (\Pi^{-1} \underline{H}' \Pi) \times \\ \quad \times \exp \left[-i \int_{-\infty}^{t'} \mathcal{E} dt \right] \chi(t') dt' \exp \left[i \int_{-\infty}^t \mathcal{E} dt \right] \\ \frac{d\mathcal{E}}{d\lambda} = \left((\Pi_{(2)}^{-1} \underline{H}' \Pi(\lambda)) \right) \text{diag} . \end{array} \right.$$

dove la funzione $\chi(t)$ ha lo stesso significato che ha in III e $(\Pi^{-1} \underline{H}' \Pi)$ diag è un operatore diagonale con H_0 avente gli elementi matrice diagonali identici a quelli di $\Pi^{-1} \underline{H}' \Pi$.

⁽¹⁾ *Nuovo Cimento*, 7, 79 (1950); 7, 375 (1950); 7, 783 (1950). Queste tre lettere saranno indicate nel testo con I, II e III rispettivamente.

Si può ora trasformando opportunamente la (2) costruire una successione di operatori

$$(3) \quad \Pi^{(0)} = 1; \quad \Pi^{(1)}; \quad \dots \quad \Pi^{(n)}; \quad \dots$$

con un metodo simile a quello di PICARD per la dimostrazione della esistenza della soluzione delle equazioni differenziali di primo ordine con condizione iniziale.

Ora, sotto condizioni abbastanza late (naturalmente molto meno restrittive di quelle da imporsi per la validità della teoria perturbativa) sulla $\underline{H'}$, e per valori abbastanza piccoli di λ si può dimostrare che tale successione di operatori ha un limite e che $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^{(n)}$ soddisfa allora la (2).

Nelle attuali teorie dei campi $\underline{H'}$ non soddisfa alle condizioni richieste, e ciò a causa delle ben note divergenze. Tuttavia si può mostrare che almeno nei casi di accoppiamento considerati in I, e se si suppongono le funzioni di Jordan-Pauli relative al caso in considerazione regolarizzate, $\underline{H'}$ soddisfa alle condizioni di convergenza della successione (3) almeno per valori di λ sufficientemente piccoli.

Quindi per modelli del tipo di quelli recentemente proposti da HEISENBERG ⁽²⁾ la (3) convergerebbe.

Nel caso delle usuali teorie dei campi gli operatori $\Pi^{(n)}$ vanno calcolati introducendo un artificio di «rinormalizzazione continua della massa e della carica». Si può mostrare che $\Pi^{(1)}$ coincide allora con la $S(t)$ di DYSON.

Non sono però riuscito a dimostrare la convergenza della (3) in questo caso.

È appena da notare che, benchè l'artificio dell'accensione adiabatica della carica non sia relativisticamente invariante, e quindi non sia tale la corrispondenza adiabatica indotta dalla $\Pi(\lambda)$ l'intrinseca covarianza della teoria non è alterata da questo fatto.

⁽²⁾ Mi è particolarmente gradito ringraziare il Prof. W. HEISENBERG per avermi fatto conoscere il manoscritto del suo lavoro: *Zur Quantentheorie der Elementarteilchen*, prima della pubblicazione.

Influenza del cammino libero medio dei neutroni veloci sulla distribuzione dei neutroni termici nei mezzi moltiplicanti.

S. GALLONE e C. SALVETTI (*).

Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 5 Settembre 1950)

In due precedenti note ⁽¹⁾ si è studiata la distribuzione dei neutroni termici nei mezzi moltiplicanti contenenti una sorgente di neutroni veloci. In G.S. si è mostrato che per un mezzo indefinito iniettato da una sorgente puntiforme la densità dei neutroni termici a distanza r dalla sorgente è data con le notazioni già usate negli articoli citati da:

$$\rho(r) = \frac{\tau_c p S_0}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\omega \exp[-\tau_0 \omega^2] \sin \omega r d\omega}{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp[-\tau \omega^2]}.$$

Questa formula è valida nella approssimazione della «age theory» e della ordinaria teoria della diffusione; in particolare si è traseurato l'effetto dello sparpagliamento dei neutroni veloci di sorgente e di moltiplicazione, vale a dire si è assunto un libero cammino medio nullo dei neutroni nascenti.

Nella sezione 3 di G.S. II si è indicato un modo semplice per mettere in luce quantitativamente l'influenza di detto effetto sulle formule di distribuzione relative al caso piano. Si vuole qui indicare sommariamente il procedimento di calcolo che va adottato qualora si assuma una funzione di distribuzione di primo urto del tipo:

$$\exp[-kr]/r^2.$$

Le distribuzioni di prima collisione relative alla sorgente artificiale S_0 ed alla sorgente dei neutroni veloci di moltiplicazione $k_\infty \rho / \tau_c p$ si ottengono mediante le trasformazioni:

$$\bar{S}_0(\mathbf{r}) = \frac{k}{4\pi} \int S_0(\mathbf{r}') \frac{\exp[-k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\mathbf{r}',$$

$$\bar{S}_1(\mathbf{r}) = \frac{kk_\infty}{4\pi\tau_0 p} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\exp[-k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\mathbf{r}'.$$

(*) Dell'Istituto di Fisica dell'Università di Milano.

(1) S. GALLONE e C. SALVETTI: *Nuovo Cimento*, 7, 482 e 626 (1950) citati nel seguito con G.S. I e G.S. II.

In simmetria sferica è facile provare che nel sistema delle autofunzioni di base $\sin \omega r/r$ i coefficienti delle funzioni trasformate (\bar{S}_0 e \bar{S}_1) si ottengono da quelli delle funzioni trasformande (S_0 e $k_\infty \rho / \tau_c p$) moltiplicando questi ultimi per il fattore

$$\frac{k}{2i\omega} \lg \left(\frac{k+i\omega}{k-i\omega} \right).$$

Utilizzando i risultati del metodo delle armoniche (vedi G.S. I sez. 4) si ottiene per la densità termica:

$$\rho(r) = \frac{k_0 \tau_c p S_0}{4\pi^2 r i} \int_0^\infty \frac{\exp[-\tau_0 \omega^2] \lg \left(\frac{k_0+i\omega}{k_0-i\omega} \right) \sin \omega r d\omega}{1 + \omega^2 L^2 - \frac{kk_\infty}{2i\omega} \lg \left(\frac{k+i\omega}{k-i\omega} \right) \exp[-\tau \omega^2]}$$

k_0 e k essendo gli inversi dei liberi cammini medi dei neutroni veloci di sorgente e di moltiplicazione e S_0 l'intensità della sorgente puntiforme.

Questo risultato non altera sostanzialmente le conclusioni di G.S. II (sez. 4) riguardo al comportamento asintotico della densità termica. Si ha però una diminuzione del laplaciano numerico β_0 della struttura cui deve corrispondere in un reattore un aumento del lato critico dovuto al maggior cammino dei neutroni nella fase di rallentamento.

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

H. TEICHMANN: *Einführung in die Quantenphysik*. Un vol. in-16º (della « Mathematisch-physikalische Bibliotek », serie II, vol. 13º) di 104 pagine con 44 figure. 2ª edizione, editore Teubner, Leipzig, 1950. In brochure, senza indicaz. di prezzo.

Con questo volumetto, l'autore si propone di far conoscere i problemi della fisica quantistica ad una larga cerchia di persone aventi interessi naturalistici. L'esposizione è quindi essenzialmente elementare, senza tuttavia perdere la precisione del linguaggio scientifico, come accade sovente nelle trattazioni divulgative.

Gli argomenti svolti e il loro ordine sono quelli consueti. Effetto fotoelettrico e effetto Compton; teoria di Bohr; onde e corpuscoli; struttura dell'atomo; nucleo. Nei limiti consentiti dal poco spazio, gli argomenti sono abbastanza chiaramente esposti, in corpo 8 essendo ricavate alcune formule fondamentali (formule di Compton, di Balmer, dipendenza della massa dalla velocità, velocità di gruppo, equazione di Schrödinger, ecc.). Inoltre l'autore da indicazioni pratiche per eseguire un certo numero di esperienze semplici illustranti le questioni trattate. Trovano posto pure paragrafi sull'ottica

elettronica, sulla teoria dei metalli, sulle statistiche quantistiche.

In conclusione l'intento dell'autore può ritenersi ben realizzato. Tuttavia avremmo desiderato qualche pagina in più o qualche argomento in meno, a vantaggio di una visione più unitaria e di una più larga giustificazione e discussione dei principi fondamentali della fisica quantistica.

A. BORSELLINO

R. BECKER: *Elektronentheorie* (Vol. II della « Theorie der Elektrizität » dello stesso autore). 7ª edizione. Un vol. in-8º di 336 pagine con 80 figure. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig, 1949.

Questa opera del BECKER è troppo conosciuta e da troppo tempo apprezzata perchè se ne debba ancora parlare.

Questa nuova edizione (la settima) riproduce, salvo lievi miglioramenti cui accenneremo fra breve, la precedente diventata a 16 anni di distanza ormai introvabile. Anche in questa edizione l'autore ha di proposito escluso ogni trattazione quantistica (salvo la teoria di Sommerfeld dei metalli) e ciò, come avverte egli stesso nella prefazione, per non alterare il contenuto del trattato

che è una esposizione, invero assai completa, della teoria classica dell'elettrone.

Qua e là, come si è detto, sono stati apportati alcuni singoli miglioramenti, rispetto alla precedente edizione; come per esempio nel paragrafo dedicato al campo generato da una distribuzione data di cariche, dove l'uso sistematico della funzione singolare di Dirac semplifica la trattazione dei potenziali ritardati e fornisce formule più significative ai fini delle applicazioni, e nel paragrafo sull'elettrone elasticamente legato dove è stata aggiunta una breve trattazione sulle forze di reazione. Qualche parte per contro è stata alegerita: come il paragrafo relativo all'effetto Faraday

magneto-ottico e quello relativo agli spettrografi di massa: i progressi conseguiti in quest'ultimo campo negli anni recenti avrebbero richiesto una trattazione troppo ampia per un trattato dedicato prevalentemente agli elettroni e quindi l'autore ha preferito rinviare il lettore alla letteratura specializzata sull'argomento.

Si tratta tuttavia di piccoli inessenziali cambiamenti che non toccano affatto, come si è avvertito, il piano dell'opera: la quale resta a tanti anni di distanza dalla prima edizione, un volume denso di argomenti e molto utile, consigliabilissimo a tutti gli studiosi di fisica e in particolare agli studenti.

C. SALVETTI

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA